Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4612

On souhaite étudier la convergence de la série $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un réel r_n tel que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + r_n$.

3. Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie converge vers 0.

4. En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente et déterminer sa somme.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4612

1. On a que :
$$\forall \in \mathbb{N},\ \int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2n+1}t^{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}\times 1^{2n+1} - \frac{1}{2n+1}\times 0^{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k \int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \underset{\substack{\textbf{Linéarité}\\ \textbf{de l'intégrale}}}{=} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \left(-t^2\right)^n\right)\mathrm{d}t \\
&\underset{\substack{\textbf{Somme des termes}\\ \textbf{d'une suite géométrique}}}{=} \int_0^1 \left(\frac{1-\left(-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \underbrace{- \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}_{=r_n}
\end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a directement que :
$$\begin{aligned}
|r_n| &= \left|-\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_0^1 \left|\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}\right|\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&\underset{1+t^2\geq 1}{\leq} \int_0^1 t^{2n+2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2n+3}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{1}{2n+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par encadrement $|r_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. Puisque $r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, et donc que la suite des sommes partielles associée à la série numérique de terme général u_n admet une limite finie qui est $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Ainsi, la série numérique de terme général u_n est convergente et a pour somme $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, c'est à dire que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

   Or un calcul direct donne que $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$, d'où la somme de cette série.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1396

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose, sous réserve de convergence, $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que l'intégrale I_1 est divergente.
2. Montrer, grâce à une intégration par partie, que l'intégrale I_n est convergente pour $n \geq 2$ et calculer sa valeur.
3. Démontrer que pour tout $k \geq 3$, on a l'inégalité $\frac{\ln(k)}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
4. En déduire la convergence de la série $\sum_{k\geq 2} \frac{\ln(k)}{k^2}$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 1396

1. La fonction $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est continue sur $[1;+\infty[$, donc l'intégrale I_1 n'est impropre qu'en $+\infty$.

   On trouve que pour tout $A > 0$:
   $$\begin{aligned}\int_1^A \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^A \\ &= \frac{1}{2}(\ln(A))^2 \\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ et donc } I_1 \text{ est bien divergente}\end{aligned}$$
   .

2. Soit $n \geq 2$ et $A > 1$. Une intégration par parties permet d'écrire :
   $$\begin{aligned}\int_1^A \frac{1}{x^n}\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}\ln(x)\right]_1^A - \int_1^A \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{-\ln(A)}{(n-1)A^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int_1^A \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\frac{-\ln(A)}{(n-1)A^{n-1}}}_{\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ par C.C.}} + \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)A^{n-1}}\right)\end{aligned}$$

   Ainsi, lorsque A tend vers $+\infty$, que I_n converge pour $n \geq 2$ et vaut $\frac{1}{(n-1)^2}$.

3. Une simple étude de fonction permet de montrer que la fonction $\varphi : \left| \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln(x)}{x^2} \end{array}\right.$ est décroissante sur $[\sqrt{\mathrm{e}};+\infty[$.

   Sachant que $\sqrt{\mathrm{e}} \approx 1,64$, on peut en déduire que pour tout $k \geq 3$ et tout $t \in [k-1;k]$: $\frac{\ln(k)}{k^2} \leq \frac{\ln(t)}{t^2}$.

   Par croissance de l'intégrale, il vient alors que pour tout $k \geq 3$: $\int_k^{k+1} \frac{\ln(k)}{k^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$, ce qui donne bien $\frac{\ln(k)}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$

4. Pour tout $p \geq 3$ en sommant membre à membre les inégalités précédentes, on peut écrire $\displaystyle\sum_{k=3}^{p} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(t)}{t^2} = \int_{2}^{p} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Lorsque p tend vers $+\infty$, cette dernière quantité admet une limite finie puisque l'intégrale I_2 est convergente.

On peut donc dire que la série numérique $\displaystyle\sum \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on peut donc conclure que la série $\displaystyle\sum \frac{\ln(k)}{k^2}$ converge.