Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 4620

1. Déterminer $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1,-\frac{1}{2}\right\},\ \frac{1}{(1+x)(1+2x)}=\frac{a}{1+x}+\frac{b}{1+2x}$

2. Former alors le développement en série entière en 0 de la fonction $f : x\longmapsto\frac{1}{(1+x)(1+2x)}$ pour lequel on précisera alors le rayon de convergence.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4620

1. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a :
$$\begin{aligned}\frac{a}{1+x}+\frac{b}{1+2x} &= \frac{a(1+2x)+b(1+x)}{(1+x)(1+2x)}\\ &= \frac{(2a+b)x+a+b}{(1=x)(1+2x)}\end{aligned}$$

Par identification avec le membre de droite de l'égalité voule, il vient le système $\left\{\begin{array}{l}a+b=1\\2a+b=0\end{array}\right.$ qui a pour solution le couple $(a,b)=(-1,2)$.

Ainsi : $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1,-\frac{1}{2}\right\},\ \frac{1}{(1+x)(1+2x)}=\frac{2}{1+2x}-\frac{1}{1+x}$.

2. Développement en série entière de f : On sait que : $\forall x\in\left]-1;1\right[,\ \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$.

Ainsi, il vient : $\forall x\in\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[,$
$$\begin{aligned}\frac{1}{1+2x} &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(2x)^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-2)^n x^n\end{aligned}$$

On en déduit alors que : $\forall x\in\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[,$
$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{2}{1+2x}-\frac{1}{1+x}\\ &= 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-2)^n x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(2\times(-2)^n-(-1)^n\right)x^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(2\times 2^n\times(-1)^n-(-1)^n\right)x^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(2^{n+1}-1\right)x^n\end{aligned}$$

Rayon de convergence du développement en série entière : soit $x\in\mathbb{R}^*$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\left|(-1)^n\left(2^{n+1}-1\right)x^n\right|$.

On a clairement que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$.

De plus : $\forall n\in\mathbb{N}^*,$
$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \left|\frac{(-1)^{n+1}\left(2^{n+1+1}-1\right)x^{n+1}}{(-1)^n\left(2^n-1\right)x^n}\right|\\ &= \frac{2^{n+1}-1}{2^n-1}\times|x|\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{n+1}}{2^n}\times|x|=2|x|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}2|x|\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques, on a :

Si $2|x| < 1$ **c'est à dire** $|x| < \frac{1}{2}$ **:** la série numérique $\sum u_n$ est convergente, c'est à dire la série numérique $\sum (-1)^n (2^n - 1) x^n$ est absolument convergente.

Si $2|x| > 1$ **c'est à dire** $|x| > \frac{1}{2}$ **:** la série numérique $\sum u_n$ est grossièrement divergente, et par suite la série numérique $\sum (-1)^n (2^n - 1) x^n$ ne converge pas.

On en déduit donc que le rayon de convergence R de cette série est $R = \frac{1}{2}$.

EX. 2 | Réf. 4619

On considère la série entière de la variable réelle $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} x^{2n}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

2. On désigne alors par S la fonction somme de cette série entière sur l'intervalle $]-R; R[$ et on rappelle que :

$$\forall x \in]-1;1[,\ \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

a. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{4n^2-1} = \frac{a}{2n+1} + \frac{b}{2n+1}$.

b. En déduire alors une expression de S à l'aide des fonctions usuelles.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 4619

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left|\frac{(-1)^n}{4n^2-1} z^n\right|$.

On a clairement que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$.

De plus : $\forall n \in \mathbb{N},$

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \left|\frac{(-1)^{n+1}}{4(n+1)^2-1} z^{2(n+1)}\right| \times \left|\frac{4n^2-1}{(-1)^n z^n}\right| \\ &= \frac{4n^2-1}{4(n+1)^2-1} \times |z|^2 \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4n^2}{4n^2} \times |z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|^2 \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques, on a :

Si $|z| < 1$ **c'est à dire** $|z| < 1$ **:** la série numérique $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente, c'est à dire la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} z^n$ est absolument convergente.

Si $|z| > 1$ **c'est à dire** $|z| > 1$ **:** la série numérique $\sum_{n\geq 1} u_n$ est grossièrement divergente, et par suite la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} z^n$ ne converge pas.

On en déduit donc que le rayon de convergence R de cette série est $R = 1$.

2. a. On peut remarquer que : $\forall n \in \mathbb{N},$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} &= \frac{(2n+1)-(2n-1)}{4n^2-1} \\ &= \frac{2}{4n^2-1} \end{aligned}$$

et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2n+1}$

b. On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \left]-1;1\right[\setminus \{0\},\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} x^{2n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2n+1} \right) x^{2n} \\
&\underset{\substack{\text{Les deux séries ont 1} \\ \text{pour rayon de convergence}}}{=} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} \\
&= \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n-1} - \frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \\
&= \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2k+1} x^{2k+1} - \frac{1}{2x} \left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \right) - \right. \\
&= -\frac{x}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2x} \left(\arctan(x) - x \right) \\
&= -\frac{x^2+1}{2x} \arctan(x) + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi : $\forall x \in \left]-1;1\right[,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} x^{2n} = -\frac{x^2+1}{2x} \arctan(x) + \frac{1}{2}$

Par ailleurs, d'après le théorème de continuité pour les séries entières, on sait que la fonction S est continue en 0 avec $S(0) = 0$.

D'où finalement : $S = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ -\dfrac{x^2+1}{2x} \arctan(x) + \dfrac{1}{2} \text{ si } x \in \left]-1;1\right[\setminus \{0\} \end{cases}$

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 4621

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0$.

On suppose par ailleurs que $\left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ tend vers une limite ℓ finie où $\ell \in \left]0;+\infty\right[$.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{2n}$

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 4621

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \left| a_n z^{2n} \right|$.
On a clairement que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \left| \frac{a_{n+1} z^{2(n+1)}}{a_n z^n} \right| \\
&= \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \times |z|^2 \\
&\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \times |z|^2
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques :

Si $\ell |z|^2 < 1$ **c'est à dire** $|z| < \dfrac{1}{\sqrt{\ell}}$ **:** la série numérique $\sum u_n$ est convergente, c'est à dire la série numérique $\sum a_n z^{2n}$ est absolument convergente.

Si $\ell |z|^2 > 1$ **c'est à dire** $|z| > \dfrac{1}{\sqrt{\ell}}$ **:** la série numérique $\sum u_n$ est grossièrement divergente, c'est à dire la série numérique $\sum a_n z^{2n}$ est n'est pas convergente.

On en déduit donc que le rayon de convergence de cette série est $\sqrt{\ell}$.

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 4622

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = w_{n+1} + w_n \end{cases}$

1. Déterminer le terme général de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum w_n x^n$.

3. Montrer que : $\forall x \in]-R;R[,\ (1-x-x^2)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = x$.

En déduire alors la fonction somme de la série entière $\sum w_n x^n$.

EX. 4 | Éléments de correction | Réf. 4622

1. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont les solutions de l'équation caractéristique sont $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Ainsi, il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \alpha\varphi^n + \beta \times \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Puisque $w_0 = 0$, il vient que $\alpha + \beta = 0$, c'est à dire $\alpha = -\beta$.

Puisque $w_1 = 1$, il vient que $\alpha - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \beta \times \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$ c'est à dire $-\beta\sqrt{5} = 1$.

On en déduit donc que : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

2. Puisque $\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$ et que $|\varphi| > 1$, on a par comparaison que : $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} o(\varphi^n)$.

On en déduit donc que $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n$.

D'après le théorème d'équivalence pour les séries entières, on sait alors que les deux séries entières $\sum w_n x^n$ et $\sum \dfrac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n x^n$ ont le même rayon de convergence. Or $\sum \dfrac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n x^n$ est une série entière de type série géométrique. Son rayon de convergence est donc égal à $\dfrac{1}{\varphi}$.

3. Toutes les séries écrites étant convergentes sur :

$$\begin{aligned}\forall x \in \left]-\frac{1}{\varphi};\frac{1}{\varphi}\right[,\ (1-x-x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^{n+1} - \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} w_{n-1} x^n - \\ &= \underbrace{w_0}_{=0} + \underbrace{w_1}_{=1} x - \underbrace{w_0}_{=0} x + \sum_{n=2}^{+\infty} \\ &= x\end{aligned}$$

On en déduit alors que : $\forall x \in \left]-\dfrac{1}{\varphi};\dfrac{1}{\varphi}\right[,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = x$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 4341

On se propose d'établir la convergence et de calculer la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}$.

Pour toute la suite de l'exercice, on définit la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \dfrac{1}{1^2+2^2+\ldots+n^2}$.
On rappelle par ailleurs que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et admet que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{4}{2n+1}$.

1. Établir la convergence de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}$.

2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

3. On désigne par S la somme de la série entière $\sum a_n x^n$, c'est à dire : $\quad \forall x \in]-R;R[, \quad S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

a. Donner une expression de $S(x)$ à l'aide des séries entières $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$.

b. Montrer que : $\quad \forall x \in]0;1[, \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x) - x\right)$.

c. À l'aide de la série entière $\sum x^{2n}$, montrer que : $\quad \forall x \in]-1;1[, \quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

d. En déduire que pour tout $0 < x < 1, \quad S(x) = 18 - \dfrac{6}{x}\left((1+\sqrt{x})^2 \ln(1+\sqrt{x}) + (1-\sqrt{x})^2 \ln(1-\sqrt{x})\right)$

e. Quelle est alors la limite de S lorsque x tend vers 1 par valeur inférieure à 1 ?

EX. 5 | Éléments de correction | Réf. 4341

1. On remarque que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$a_n = \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2} = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}$$

et ainsi que : $\quad a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{n^3}$.

La série numérique $\sum \dfrac{1}{n^3}$ étant une série de Rieman convergente puisque $3 > 1$, on en déduit que la série numérique $\sum \dfrac{3}{n^3}$ est une série convergente.

Étant immédiat que la série numérique $\sum a_n$ est à termes positifs, d'après le théorème d'équivalence pour les séries numériques à termes positifs, cette dernière est convergente.

2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = |a_n z^n|$.
On a clairement que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq 0$.

Par ailleurs : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+2)(2n+3)} |z|$$

On en déduit donc que : $\quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|$

Par suite, il vient que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|$.

D'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques, il vient que :

si $|z|<1$ **:** la série numérique à termes positifs $\sum u_n$ est convergente, et par suite que la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente, donc convergente.

si $|z|>1$ **:** la série numérique à termes positifs $\sum u_n$ est grossièrement divergente, et par suite que la série numérique $\sum a_n z^n$ est divergente.

Ainsi, d'après la caractérisation du rayon de convergence d'une série entière, on en déduit que la série entière $\sum a_n x^n$ est $R=1$.

3. a. On a directement que : $\forall x \in\,]-1;1[,$
$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{n(n+1)(2n+1)} x^n \\ &= 6\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{4}{2n+1}\right)x^n \end{aligned}$$

La série entière $\sum \frac{x^n}{n}$ est de même rayon de convergence que la série entière $\sum x^n$, c'est à dire 1.

La série entière $\sum \frac{1}{n+1}x^n$ est de même rayon de convergence que la série entière $\sum \frac{x^n}{n+1}$ puisque $\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, c'est à dire 1.

La série entière $\sum \frac{4}{2n+1}x^n$ est de même rayon de convergence que la série entière $\sum \frac{2x^n}{n}$ puisque $\frac{4}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$, qui est elle même de même rayon de convergence que la série entière $\sum \frac{x^n}{n}$, c'est à dire 1.

Par suite, on peut donc écrire que : $\forall x \in\,]-1;1[, \quad S(x) = 6\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1} - 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right)$

b. Pour tout $x \in\,]-1;1[,$
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1} &= \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n} \\ &= \frac{1}{x}\left(\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right)-\frac{x^1}{1}\right) \\ &= \frac{1}{x}()\ln(1-x)-x) \end{aligned}$$

c. On sait que : $\forall x \in\,]-1;1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$

Par suite, il vient que : $\forall x \in\,]-1;1[$
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} &= \frac{1}{1-x^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right) \end{aligned}$$

On note alors S la somme de la série entière $\sum x^{2n}$ qui est de rayon de convergence égal à 1, c'est à dire : $\forall x \in\,]-1;1[, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}.$

D'après le théorème d'intégration termes à termes pour les séries entières, on en déduit que :
$$\forall x \in\,]-1;1[, \quad \int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Par suite, puisque : $\forall x \in\,]-1;1[,$
$$\begin{aligned} \int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[-\ln(1-t)+\ln(1+t)\right]_0^x \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{aligned}$$

on en déduit que : $\forall x \in \left]-1;1\right[,\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$

d. Pour tout $x \in \left]0;1\right[$, on a :

$$\begin{aligned}
S(x) &= 6\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1} - 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right)\\
&= 6\left(-\ln(1-x) + \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)-x\right) - 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right)\\
&= 6\left(-\ln(1-x) + \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)-x\right) - 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\sqrt{x})^{2n}}{2n+1}\right)\\
&= 6\left(-\ln(1-x) + \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)-x\right) - 4\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1}\right)\\
&= 6\left(-\ln(1-x) + \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)-x\right) - 4\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1}\right) - \frac{(\sqrt{x})^{2\times 0+1}}{2\times 0+1}\right)\right)\\
&= 6\left(-\ln(1-x) + \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)-x\right) - 4\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1}\right) - \sqrt{x}\right)\right)\\
&= 6\left(-\ln(1-x) + \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)-x\right) - 4\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) - \sqrt{x}\right)\right)\\
&= 6\left(-\ln(1-x) - \frac{\ln(1-x)}{x} - 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) + 4\right)\\
&= 18 - 6\left(\ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\right)\\
&= 18 - 6\left(\ln\left((1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})\right) + \frac{\ln\left((1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})\right)}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\right)\\
&= 18 - 6\left(\ln(1+\sqrt{x})\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right) + \ln(1-\sqrt{x})\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\right)\\
&= 18 - 6\left(\frac{\ln(1+\sqrt{x})(x+2\sqrt{x}+1)}{x} + \frac{\ln(1-\sqrt{x})(x-2\sqrt{x}+1)}{x}\right)\\
&= 18 - \frac{6}{x}\left((1+\sqrt{x})^2\ln(1+\sqrt{x}) + (1-\sqrt{x})^2\ln(1-\sqrt{x})\right)
\end{aligned}$$

e. Puisque $X^2\ln(X) \underset{X\to 0}{\longrightarrow} 0$ d'après le théorème sur les croissances comparées, par composition des limites, on en déduit que $(1-\sqrt{x})^2\ln(1-\sqrt{x}) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0$.

Finalement, on en déduit que : $S(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 18 - 24\ln(2)$.