Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le résultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Je m'entraîne à rédiger

EX. 1 | Réf. 4340

On définit l'application $\langle \bullet \,|\, \bullet \rangle$ sur $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\langle \bullet \,|\, \bullet \rangle : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & P(0) \times Q(0) + P'(0) \times Q'(0) + P''(0) \times Q''(0) \end{array} \right.$$

Montrer que $\langle \bullet \,|\, \bullet \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4340

Caractère symétrique de $\langle \bullet \,|\, \bullet \rangle$: soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$.

On a donc :
$$\begin{aligned} \langle P \,|\, Q \rangle &= P(0) \times Q(0) + P'(0) \times Q'(0) + P''(0) \times Q''(0) \\ &= Q(0) \times P(0) + Q'(0) \times P'(0) + Q''(0) \times P''(0) \\ &= \langle Q \,|\, P \rangle \end{aligned}$$

Par suite, $\langle \bullet \,|\, \bullet \rangle$ est symétrique.

Caractère bilinéaire de $\langle \bullet \,|\, \bullet \rangle$: soit $(P,Q,R) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a donc :
$$\begin{aligned} \langle \lambda P + Q \,|\, R \rangle &= (\lambda P + Q)(0) \times R(0) + (\lambda P + Q)'(0) \times R'(0) + (\lambda P + Q)''(0) \times R''(0) \\ &\underset{\substack{\textbf{Par linéarité} \\ \textbf{de la dérivation}}}{=} (\lambda P + Q)(0) \times R(0) + (\lambda P' + Q')(0) \times R'(0) + (\lambda P'' + Q'')(0) \times R''(0) \\ &= (\lambda P(0) + Q(0)) \times R(0) + (\lambda P'(0) + Q'(0)) \times R'(0) + (\lambda P''(0) + Q''(0)) \times R''(\\ &= \lambda \left(P(0) \times R(0) + P'(0) \times R'(0) + P''(0) \times R''(0)\right) + Q(0) \times R(0) + Q'(0) \times R'(\\ &= \lambda \langle P \,|\, R \rangle + \langle Q \,|\, R \rangle \end{aligned}$$

On en déduit donc que $\langle \bullet \,|\, \bullet \rangle$ est linéaire à gauche. Comme elle est symétrique, elle est donc linéaire à droite, et par suite on en déduit que $\langle \bullet \,|\, \bullet \rangle$ est bilinéaire.

Caractère positif de $\langle \bullet \,|\, \bullet \rangle$: soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

On a donc que : $\langle P \,|\, P \rangle = \underbrace{\underbrace{P(0) \times P(0)}_{\geq 0} + \underbrace{P'(0) \times P'(0)}_{\geq 0} + \underbrace{P''(0) \times P''(0}_{\geq 0}}_{\geq 0}$

Par suite, $\langle P \,|\, P \rangle \geq 0$ ainsi $\langle \bullet \,|\, \bullet \rangle$ est positive.

Caractère défini de $\langle \bullet \,|\, \bullet \rangle$: il est immédiat que si $P = \tilde{0}$, on a $P' = \tilde{0}$ et $P'' = \tilde{0}$ et par suite que $P(0) = 0$, $P'(0) = 0$ et $P''(0)$ ce qui amène $\langle P \,|\, P \rangle = 0$.

Réciproquement, supposons que $P \in \mathbb{R}_2[X]$ soit tel que $\langle P \,|\, P \rangle = 0$.

On en déduit donc que : $(P(0))^2 + (P'(0))^2 + (P''(0))^2 = 0$.

Il s'agit donc d'une somme nulle de nombres positifs. On en déduit donc que chaque terme est nul, c'est à dire
$\begin{cases} (P(0))^2 = 0 \\ (P'(0))^2 = 0 \\ (P''(0))^2 = 0 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} P(0) = 0 \\ P'(0) = 0 \\ P''(0) = 0 \end{cases}$.

On en déduit donc que 0 est une racine de P d'ordre au moins égal à trois, c'est à dire que X^3 divise P.

Or $P \in \mathbb{R}_2[X]$, donc ce n'est possible que si $P = \tilde{0}$.

En conséquent, $\langle \bullet \,|\, \bullet \rangle$ est définie.

Par suite, $\langle \bullet \,|\, \bullet \rangle$ est symétrique, bilinéaire, positive et définie. C'est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4341

On se propose d'établir la convergence et de calculer la somme de la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}$.

Pour toute la suite de l'exercice, on définit la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{1^2+2^2+\ldots+n^2}$.
On rappelle par ailleurs que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et admet que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}$.

1. Établir la convergence de la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}$.

2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

3. On désigne par S la somme de la série entière $\sum a_n x^n$, c'est à dire : $\forall x \in]-R;R[, \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

a. Donner une expression de $S(x)$ à l'aide des séries entières $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$.

b. Montrer que : $\forall x \in]0;1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x) - x\right)$.

c. À l'aide de la série entière $\sum x^{2n}$, montrer que : $\forall x \in]-1;1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

d. En déduire que pour tout $0 < x < 1$, $S(x) = 18 - \frac{6}{x}\left((1+\sqrt{x})^2 \ln(1+\sqrt{x}) + (1-\sqrt{x})^2 \ln(1-\sqrt{x})\right)$

e. Quelle est alors la limite de S lorsque x tend vers 1 par valeur inférieure à 1 ?

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 4341

1. On remarque que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$a_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^2} = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}$$

et ainsi que : $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{n^3}$.

La série numérique $\sum \frac{1}{n^3}$ étant une série de Rieman convergente puisque $3 > 1$, on en déduit que la série numérique $\sum \frac{3}{n^3}$ est une série convergente.

Étant immédiat que la série numérique $\sum a_n$ est à termes positifs, d'après le théorème d'équivalence pour les séries numériques à termes positifs, cette dernière est convergente.

2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = |a_n z^n|$.
On a clairement que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq 0$.

Par ailleurs : $\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+2)(2n+3)} |z|$$

On en déduit donc que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|$

Par suite, il vient que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|$.

D'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques, il vient que :

si $|z|<1$ **:** la série numérique à termes positifs $\sum u_n$ est convergente, et par suite que la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente, donc convergente.

si $|z|>1$ **:** la série numérique à termes positifs $\sum u_n$ est grossièrement divergente, et par suite que la série numérique $\sum a_n z^n$ est divergente.

Ainsi, d'après la caractérisation du rayon de convergence d'une série entière, on en déduit que la série entière $\sum a_n x^n$ est $R=1$.

3. a. On a directement que : $\forall x \in]-1;1[,$

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{n(n+1)(2n+1)} x^n \\ &= 6\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{4}{2n+1}\right)x^n \end{aligned}$$

La série entière $\sum \frac{x^n}{n}$ est de même rayon de convergence que la série entière $\sum x^n$, c'est à dire 1.

La série entière $\sum \frac{1}{n+1}x^n$ est de même rayon de convergence que la série entière $\sum \frac{x^n}{n+1}$ puisque $\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, c'est à dire 1.

La série entière $\sum \frac{4}{2n+1}x^n$ est de même rayon de convergence que la série entière $\sum \frac{2x^n}{n}$ puisque $\frac{4}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$, qui est elle même de même rayon de convergence que la série entière $\sum \frac{x^n}{n}$, c'est à dire 1.

Par suite, on peut donc écrire que : $\forall x \in]-1;1[,\quad S(x) = 6\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1} - 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right)$

b. Pour tout $x \in]-1;1[,$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1} &= \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n} \\ &= \frac{1}{x}\left(\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right)-\frac{x^1}{1}\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(\right)\ln(1-x)-x) \end{aligned}$$

c. On sait que : $\forall x \in]-1;1[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$

Par suite, il vient que : $\forall x \in]-1;1[$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} &= \frac{1}{1-x^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right) \end{aligned}$$

On note alors S la somme de la série entière $\sum x^{2n}$ qui est de rayon de convergence égal à 1, c'est à dire : $\forall x \in]-1;1[,\quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}.$

D'après le théorème d'intégration termes à termes pour les séries entières, on en déduit que :

$$\forall x \in]-1;1[,\quad \int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Par suite, puisque : $\forall x \in]-1;1[,$

$$\begin{aligned} \int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[-\ln(1-t)+\ln(1+t)\right]_0^x \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{aligned}$$

on en déduit que : $\forall x\in\,]-1;1[,\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$

d. Pour tout $x\in\,]0;1[$, on a :

$$\begin{aligned}
S(x) &= 6\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}-4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right)\\
&= 6\left(-\ln(1-x)+\frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)-x\right)-4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right)\\
&= 6\left(-\ln(1-x)+\frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)-x\right)-4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n}}{2n+1}\right)\\
&= 6\left(-\ln(1-x)+\frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)-x\right)-4\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n+1}}{2n+1}\right)\\
&= 6\left(-\ln(1-x)+\frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)-x\right)-4\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n+1}}{2n+1}\right)-\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2\times 0+1}}{2\times 0+1}\right)\right)\\
&= 6\left(-\ln(1-x)+\frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)-x\right)-4\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n+1}}{2n+1}\right)-\sqrt{x}\right)\right)\\
&= 6\left(-\ln(1-x)+\frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)-x\right)-4\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)-\sqrt{x}\right)\right)\\
&= 6\left(-\ln(1-x)-\frac{\ln(1-x)}{x}-1-\frac{2}{\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)+4\right)\\
&= 18-6\left(\ln(1-x)+\frac{\ln(1-x)}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\right)\\
&= 18-6\left(\ln\left(\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)\right)+\frac{\ln\left(\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)\right)}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\right)\\
&= 18-6\left(\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)+\ln\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\right)\\
&= 18-6\left(\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\left(x+2\sqrt{x}+1\right)}{x}+\frac{\ln\left(1-\sqrt{x}\right)\left(x-2\sqrt{x}+1\right)}{x}\right)\\
&= 18-\frac{6}{x}\left(\left(1+\sqrt{x}\right)^2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+\left(1-\sqrt{x}\right)^2\ln\left(1-\sqrt{x}\right)\right)
\end{aligned}$$

e. Puisque $X^2\ln(X)\underset{X\to 0}{\longrightarrow}0$ d'après le théorème sur les croissances comparées, par composition des limites, on en déduit que $\left(1-\sqrt{x}\right)^2\ln\left(1-\sqrt{x}\right)\underset{x\to 1^-}{\longrightarrow}0.$

Finalement, on en déduit que : $S(x)\underset{x\to 1^-}{\longrightarrow}18-24\ln(2).$

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 4342

On désigne par $(\star)$ l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 suivante :

$$(\star):\quad x^2y''-x\left(2x^2-1\right)y'-\left(2x^2+1\right)y=0$$

1. Soit $f:x\longmapsto\dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
Montrer que f est une solution de $(\star)$ sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

2. On se propose dans cette question de déterminer les fonctions solutions de $(\star)$ qui sont développables en série entière.
Soit alors $\sum a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ dont on note S la somme, c'est à dire que :

$$\forall x\in\,]-R;R[,\quad S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n.$$

On suppose pour la suite de cette question que la fonction S est solution de $(\star)$ sur $]-R;R[$.

a. Exprimer pour $x\in\,]-R;R[$, $S'(x)$ et $S''(x)$.

b. Démontrer que $a_0=0$ et que pour tout entier $n\geq 2$, on a : $\quad a_n=\dfrac{2}{n+1}a_{n-2}.$

c. Calculer a_2. Plus généralement, que vaut a_n si n est un entier pair ?

d. Si n est impair, on écrit $n = 2p+1$ où $p \in \mathbb{N}$.
Pour tout entier p supérieur ou égal à 1, exprimer a_{2p+1} en fonction de a_{2p-1}.
Montrer alors que pour tout entier naturel p : $\quad a_{2p+1} = \dfrac{a_1}{(p+1)!}$.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p\geq 0} \frac{x^{2p+1}}{(p+1)!}$.

4. Donner, sans démonstration, les développements en série entière des fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2}$.

5. On note pour tout réel x, $g(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(p+1)!}$. Que vaut $g(0)$?

Exprimer pour tout réel x non nul, $g(x)$ en fonction de e^{x^2} et de x.

6. Préciser la dimension de l'espace vectoriel des solutions sur $]0;+\infty[$ de l'équation différentielle $(\star)$, puis exprimer les solutions de $(\star)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ à l'aide des fonctions f et g.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 4342

1. En notant I l'un des deux intervalles $]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$, on sait que : $\quad \forall x \in I, \quad f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$.
Par suite : (f est solution de $(\star)$ sur I) $\quad\Leftrightarrow\quad \left(\forall x \in I, \quad x^2 f''(x) - x\left(2x^2-1\right)f'(x) - \left(2x^2+1\right)f(x) = 0\right)$

Or on a : $\forall x \in I, \quad$
$$\begin{aligned} x^2 f''(x) - x\left(2x^2-1\right)f'(x) - \left(2x^2+1\right)f(x) &= x^2 \times \frac{2}{x^3} - x\left(2x^2+1\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \left(2x^2+1\right) \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{2}{x} + \frac{1}{x}\left(2x^2-1\right) - 2x - \frac{1}{x} \\ &= \frac{2}{x} + 2x - \frac{1}{x} - 2x - \frac{1}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et par suite f est bien solution de $(\star)$ sur I.

2. **a.** D'après le théorème de dérivation termes à termes pour les séries entières, la fonction S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R;R[$ et on a :

$$\forall x \in\,]-R;R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \text{et} \qquad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

b. On a donc :

$$\begin{array}{rl}
\left(\begin{array}{c} S \text{ est solution de} \\ (\star) \text{ sur }]-R;R[\end{array}\right) & \Leftrightarrow \left(\forall x \in]-R;R[,\quad x^2S''(x) - x\left(2x^2-1\right)S'(x) - \left(2x^2+1\right)S(x) = 0\right) \\
& \Leftrightarrow \left(\forall x \in]-R;R[,\quad x^2\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} - x\left(2x^2-1\right)\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} - \left(2x^2+1\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \right. \\
& \Leftrightarrow \left(\forall x \in]-R;R[,\quad \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} - \left(2x^2-1\right)\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n} - \left(2x^2+1\right)\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n = \right. \\
& \Leftrightarrow \left(\forall x \in]-R;R[,\quad \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_nx^{n+2} + \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_nx^{n+2} - \right. \\
& \Leftrightarrow \left(\forall x \in]-R;R[,\quad \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} - \sum_{n=3}^{+\infty} 2(n-2)a_{n-2}x^{n} + \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n} - \sum_{n=2}^{+\infty} 2a_{n-2} \right. \\
& \Leftrightarrow \left(\forall x \in]-R;R[,\quad \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n} - \sum_{n=2}^{+\infty} 2(n-2)a_{n-2}x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n} - \sum_{n=2}^{+\infty} 2a_{n-2} \right. \\
& \Leftrightarrow \left(\forall x \in]-R;R[,\quad 0\times a_0x^0 + 1\times a_1x^1 - a_1x^1 - a_0x^0 + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(n(n-1)a_n - 2(n-2)a \right.\right. \\
& \Leftrightarrow \left(\forall x \in]-R;R[,\quad \left(\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(n(n-1)a_n - 2(n-2)a_{n-2} + na_n - 2a_{n-2} - a_n\right)x^n\right) - a_0 \right. \\
& \Leftrightarrow \left(\forall x \in]-R;R[,\quad \left(\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(n^2-1\right)a_n - 2(n-1)a_{n-2}\right)x^n\right) - a_0 = 0\right)
\end{array}$$

Ainsi, par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, il vient que :

$$\begin{array}{rl}
\left(\begin{array}{c} S \text{ est solution de} \\ (\star) \text{ sur }]-R;R[\end{array}\right) & \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\quad \left(n^2-1\right)a_n - 2(n-1)a_{n-2} = 0 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\quad (n+1)\,a_n - 2a_{n-2} = 0 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\quad a_n = \dfrac{2}{n+1}a_{n-2} \quad (\diamond) \end{array}\right.
\end{array}$$

c. Puisque $a_2 = \dfrac{2}{0+1}a_0$ et que $a_0 = 0$, il vient que $a_2 = 0$ et plus généralement, on montrerait à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que tous les termes d'indices pairs de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont nuls.

d. La relation $(\diamond)$ permet d'écrire notamment que : $\forall p \in \mathbb{N},\quad a_{2p+1} = \dfrac{1}{p+1}a_{2p-1}$.

Par suite on en déduit que : $\forall p \in \mathbb{N},$

$$\begin{aligned}
a_{2p+1} &= \frac{1}{p+1}a_{2p-1} \\
&= \frac{1}{p+1}\times\frac{1}{p}a_{2p-3} \\
&= \frac{1}{p+1}\times\frac{1}{p}\times\frac{1}{p-1}a_{2p-5} \\
&\;\vdots \qquad \vdots \\
&= \frac{1}{p+1}\times\frac{1}{p}\times\frac{1}{p-1}\times\ldots\times\frac{1}{2}\times a_1
\end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire que : $\forall p \in \mathbb{N},\quad a_{2p+1} = \dfrac{1}{(p+1)!}a_1$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $u_p = \left|\dfrac{1}{(p+1)!}z^{2p+1}\right|$.

On a clairement que : $\forall p \in \mathbb{N},\quad u_p \geq 0$.

Par suite, il vient que : $\forall p \in \mathbb{N},\quad \dfrac{u_{p+1}}{u_p} = \dfrac{1}{p+2}\,|z|^2$.

On en déduit donc que : $\dfrac{up+1}{u_p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$.

Par conséquent, d'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques, la série $\sum u_p$ est une série convergence quelque soit la valeur de z.

On en déduit donc que la série numérique $\sum \dfrac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}$ est absolument convergente quelque soit la valeur de z.

Ainsi, le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^{2p+1}}{(p+1)!}$ est $+\infty$.

4. On a donc que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{\,x} = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!}$ et $\mathrm{e}^{\,x^2} = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{p!}$.

Ces deux séries entières sont par ailleurs de rayon de convergence infini.

5. Par définition de g, $g(0) = 0$.

De plus, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p-1}}{p!} \\ &= \frac{1}{x} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{p!} \\ &= \frac{1}{x} \left(\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{p!} \right) - 1 \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(\mathrm{e}^{\,x^2} - 1 \right) \end{aligned}$$

6. $(\star)$ est bien une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2.

Par ailleurs, mise sous forme résolue sur l'intervalle $]0; +\infty[$, $(\star)$ devient : $y'' - \dfrac{2x^2-1}{x} y' - \dfrac{2x^2+1}{x^2} y = 0$

Les fonctions $x \longmapsto -\dfrac{2x^2-1}{x}$ et $x \longmapsto -\dfrac{2x^2+1}{x^2}$ étant continues sur l'intervalle $]0; +\infty[$, par théorème, l'ensemble des solutions de $(\star)$ est un plan vectoriel, autrement dit, un espace vectoriel de dimension 2.

f et g étant solutions de $(\star)$ sur $]0; +\infty[$, et formant une famille libre, comme il s'agit d'une famille libre de deux vecteurs dans un espace de dimension 2, ces deux dernières forment une base des solutions de $(\star)$ sur $]0; +\infty[$.

Par conséquent, les solutions sur $]0; +\infty[$ sont les fonctions : $\quad x \longmapsto \dfrac{1}{x} \left(\alpha + \beta \mathrm{e}^{\,x^2} \right)$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.