À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [5010] | 1| Application linéaire

Soient $u=(1,1,1)$ et $v=(2,-1,-1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
On considère alors l'application f donnée par :

$$f:\left|\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ x=(x_1,x_2,x_3) & \longmapsto & (x_1-2x_2+x_3)\,u+(x_1+x_2-x_3)\,v\end{array}\right.$$

(1). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(2). Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(3). f est-il un automorphisme ?

Éléments de correction

(1). Puisque $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$, il suffit de s'assurer du caractère linéaire de f pour que cette dernière soit un endomorphisme.

$$\left(\ f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3\ \text{ est linéaire }\right)\ \Leftrightarrow\ \left(\left\{\begin{array}{rcl}\forall\lambda & \in & \mathbb{R}\\ \forall x=(x_1,x_2,x_3) & \in & \mathbb{R}^3\\ \forall y=(y_1,y_2,y_3) & \in & \mathbb{R}^3\end{array}\right.,\ f(\lambda x+y)=\lambda f(x)+f(y)\right)$$

Soit alors $\left\{\begin{array}{rcl}\lambda & \in & \mathbb{R}\\ x=(x_1,x_2,x_3) & \in & \mathbb{R}^3\\ y=(y_1,y_2,y_3) & \in & \mathbb{R}^3\end{array}\right.$, on pose alors $w=\lambda x+y$.
Montrons que $f(w)=\lambda f(x)+f(y)$.
Par construction de w, on a $w=(\lambda x_1+y_1,\lambda x_2+y_2,\lambda x_3+y_3)$.
Il vient alors que :

$$\begin{aligned}
f(w) &= (w_1-2w_2+w_3)\,u+(w_1+w_2-w_3)\,v\\
&= (\lambda x_1+y_1-2(\lambda x_2+y_2)+\lambda x_3+y_3)\,u\\
&\qquad+(\lambda x_1+y_1+\lambda x_2+y_2-(\lambda x3_{+}y_3))\,v\\
&= (\lambda x_1+y_1-2\lambda x_2-2y_1+\lambda x_3+y_3)\,u\\
&\qquad+(\lambda x_1+y_1+\lambda x_2+y_2-\lambda x_1-y_1)\,v\\
&= (\lambda x_1-2\lambda x_2+\lambda x_3)\,u+(y_1-2y_2+y_3)\,v\\
&\qquad+(\lambda x_1+\lambda x_2-\lambda x_3)\,v+(y_1+y_2-y_3)\,v\\
&= \lambda\underbrace{((x_1-2x_2+x_3)\,u+(x_1+x_2-x_3)\,v)}_{=f(x)}\\
&\qquad\underbrace{(y_1-2y_2+y_3)\,u+(y_1+y_2-y_3)\,v}_{=f(v)}\\
&= \lambda f(u)+f(v)
\end{aligned}$$

et f est ainsi linéaire, et puisque $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$, f est bien un endomorphisme.

(2). En notant $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a trivialement que :

$$f(e_1) = (1-2\times 0+0)\,u + (1+0-0)\,v = u+v = (3,0,0)$$

$$f(e_2) = (0-2\times 1+0)\,u + (0+1-0)\,v = -2u+v = (-2,-3,-3)$$

$$f(e_3) = (0-2\times 0+1)\,u + (0+0-1)\,v = u-v = (-1,2,2)$$

et par suite, la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

(3). Par théorème, puisque A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\left(\begin{array}{c} f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \\ \text{est bijective} \end{array}\right) \Leftrightarrow (A \text{ est inversible}) \Leftrightarrow (\operatorname{rg}(A) = 3)$$

Comme les deux dernières lignes de A sont proportionnelles, le rang de A vaut au plus 2, et par suite, A n'est pas inversible, et donc f n'est pas un automorphisme.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [2667] | 2| Polynômes d'interpolation de Lagrange

On se propose de déterminer dans cet exercice le(s) polynôme(s) P de degré 2 qui satisfont à la condition suivante :

$$(\star) : \begin{cases} P(x_0) = y_0 \\ P(x_1) = y_1 \\ P(x_2) = y_2 \end{cases} \text{ où } (x_0,x_1,x_2,y_0,y_1,y_2) \in \mathbb{R}^6$$

autrement dit dont la courbe représentative passe par trois points donnés du plan.

(1). Détermination par résolution de système : soit P le polynôme de degré donné par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = ax^2+bx+c \text{ où } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$$

Déterminer le triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ pour que le polynôme P satisfasse à la condition

$$(\star_0) : \begin{cases} P(-2) = 3 \\ P(1) = -2 \\ P(5) = 2 \end{cases}$$

(2). Mise en place de la méthode d'interpolation de Lagrange : on cherche dans cette question à déterminer le(s) polynôme(s) P de degré 2 qui satisfont à la condition

$$(\star_1) : \begin{cases} P(-1) = -1 \\ P(2) = 3 \\ P(4) = 6 \end{cases}$$

(a). Déterminer le triplet $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ pour que le polynôme P donné par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \alpha(x-2)(x-4) + \beta(x+1)(x-4) + \gamma(x+1)(x-2)$$

satisfasse à $(\star_1)$.
En donner ensuite son expression développée.

(b). En s'inspirant de la question précédente, déterminer un polynôme Q de degré 2 qui satisfait à la condition suivante :

$$(\star_2) : \left\{ \begin{array}{rcl} Q(2) & = & -3 \\ Q(-5) & = & 1 \\ Q(-3) & = & -1 \end{array} \right.$$

En donner ensuite son expression développée.

(3). Formule d'interpolation de Lagrange : soit P un polynôme de degré 2 donné par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \alpha\,(x - x_0)\,(x - x_1) + \beta\,(x - x_0)\,(x - x_2) + \gamma\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

et satisfaisant à la condition

$$(\star) : \left\{ \begin{array}{rcl} P\,(x_0) & = & y_0 \\ P\,(x_1) & = & y_1 \\ P\,(x_2) & = & y_2 \end{array} \right.$$

où $(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^6$ est donné et tel que les points (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2) ne sont pas alignés.

(a). Déterminer α, β et γ en fonction de $(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^6$.

(b). Donner alors l'expression développée du polynôme R satisfaisant à la condition $(\star_3) : \left\{ \begin{array}{rcl} R(-3) & = & 2 \\ R(2) & = & -1 \\ R(4) & = & 7 \end{array} \right.$.

(4). Extension à un polynôme de degré 3 : en s'inspirant des questions précédentes et des formules de Lagrange établies pour un polynôme de degré 2, déterminer un polynôme S de degré 3 qui satisfait à la condition

$$(\star_4) : \left\{ \begin{array}{rcl} S(-5) & = & 1 \\ S(-3) & = & -2 \\ S(2) & = & 1 \\ S(4) & = & 5 \end{array} \right.$$

et dont on donnera ensuite la forme développée.

Éléments de correction

(1). En évaluant le polynôme P proposé en -2, 1 et 5, il vient : $\quad P$ satisfait $(\star_0) \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4a - 2b + c = 3 \\ a + b + c = -2 \\ 25a + 5b + c = 2 \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 4a & -2b & +c & = 3 \\ a & +b & +c & = -2 \\ 25a & +5b & +c & = 2 \end{array} \right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{4} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{25}{4} L_1}}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rrrl} 4a & -2b & +c & = 3 \\ & \frac{3}{2} b & +\frac{3}{4} c & = -\frac{11}{4} \\ & \frac{35}{2} b & -\frac{21}{4} c & = -\frac{67}{4} \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{35}{3} L_2}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rrrl} 4a & -2b & +c & = 3 \\ & \frac{3}{2} b & +\frac{3}{4} c & = -\frac{11}{4} \\ & & -14c & = \frac{46}{3} \end{array} \right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{56} L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{14} L_3}}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rrrl} 4a & -2b & & = \frac{86}{21} \\ & \frac{3}{2} b & & = -\frac{27}{14} \\ & & -14c & = \frac{46}{3} \end{array} \right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{4}{3} L_2}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rrrl} 4a & & & = \frac{32}{21} \\ & \frac{3}{2} b & & = -\frac{27}{14} \\ & & -14c & = \frac{46}{3} \end{array} \right. \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{4} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{2}{3} L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{14} L_3}}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rrrl} a & & & = \frac{8}{21} \\ & b & & = -\frac{9}{7} \\ & & c & = -\frac{23}{21} \end{array} \right.$$

Ainsi, le polynôme P cherché est donné par : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \frac{8}{21} x^2 - \frac{9}{7} x - \frac{23}{21}}$

(2).(a). On a directement que : $\quad P(-1) = \alpha\,(-1 - 2)\,(-1 - 4)$ et donc $-1 = 15\alpha$ ce qui donne $\boxed{\alpha = -\frac{1}{15}}$.

De même : $\quad P(2) = \beta\,(2 + 1)\,(2 - 4)$ et donc $3 = -6\beta$ ce qui donne $\boxed{\beta = -\frac{1}{2}}$.

Et enfin : $\quad P(4) = \gamma\,(4 + 1)\,(4 - 2)$ et donc $6 = 10\gamma$ ce qui donne $\boxed{\gamma = \frac{3}{5}}$.

En développant, on obtient alors : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \frac{1}{30}x^2 + \frac{13}{10}x + \frac{4}{15}}$.

(b). On cherche l'expression de Q sous la forme : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \alpha(x-2)(x+5) + \beta(x-2)(x+3) + \gamma(x+5)x+3)$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ sera déterminé par $(\star_2)$.

Sur le même principe alors que la question précédente, n a directement que : $Q(2) = \gamma(2+5)(2+3)$ et donc $-3 = 35\gamma$ ce qui donne $\boxed{\gamma = -\frac{3}{35}\gamma}$.

De même : $Q(-5) = \beta(-5-2)(-5+3)$ et donc $1 = 14\beta$ ce qui donne $\boxed{\beta = \frac{1}{14}\beta}$.

Et enfin : $Q(-3) = \alpha(-3-2)(-3+5)$ et donc $-1 = -10\alpha$ ce qui donne $\boxed{\alpha = \frac{1}{10}}$.

En développant, on obtient alors : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \frac{3}{35}x^2 - \frac{11}{35}x - \frac{19}{7}}$

(3).(a). On a directement que $P(x_0) = \gamma(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$ et donc $\boxed{\gamma = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}}$.

De même : $P(x_1) = \beta(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)$ et donc $\boxed{\beta = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}}$.

Et on a : $P(x_2) = \alpha(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$ et donc $\boxed{\alpha = \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}}$.

(b). En appliquant les formules précédemment trouvées à la condition $(\star_3)$ pour R en écrivant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $SR(x) = \alpha(x+3)(x-2) + \beta(x+3)(x-4) + \gamma(x-2)(x-4)$, il vient que $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{10}$ et $\gamma = \frac{2}{35}$ ce qui donne pour expression développée pour S : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = \frac{23}{25}x^2 + \frac{2}{35}x - \frac{131}{35}}$

(4). On cherche le polynôme S sous la forme : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha(x+5)(x+3)(x-2) + \beta(x+5)(x+3)(x-4) + \gamma(x+3)(x-2)(x-4) + \delta(x+5)(x-2)(x-4)$ où $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$.

En évaluant en -5, puis en -2, puis en 2 et finalement en 4 comme précédemment, on obtient que $\alpha = \frac{5}{126}$, $\beta = -\frac{1}{70}$, $\delta = -\frac{1}{35}$ et $\gamma = -\frac{1}{126}$.

On en déduit alors l'expression développée de S : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = -\frac{1}{90}x^3 + \frac{7}{30}x^2 + \frac{41}{45}x - \frac{5}{3}}$.