À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [2444] | 1| Opérations sur les quotients

Mettre sous forme d'un seul quotient chacune des expressions suivantes :

(1). Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $A(n) = \dfrac{1}{2(n-1)} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2(n+1)}$

(2). Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{(x-1)^3} + \dfrac{1}{(x-1)^4}$

(3). Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\quad q(t) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+t^2}}}}$

Éléments de correction

(1). On a : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{-1, 0, 1\}$,

$$\begin{aligned} A(n) &= \frac{n(n+1) - 2(n+1)(n-1) + n(n-1)}{2n(n+1)(n-1)} \\ &= \frac{n^2 + n - 2\left(n^2 - 1\right) + n^2 - n}{2n(n+1)(n-1)} \\ &= \frac{2n^2 - 2n^2 + 2}{2n(n+1)(n-1)} \\ &= \frac{2}{2n(n+1)(n-1)} \\ &= \frac{1}{n(n+1)(n-1)} \end{aligned}$$

(2). On a : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-1)^4}{x(x-1)^4} - \frac{x(x-1)^3}{x(x-1)^4} + \frac{x(x-1)^2}{x(x-1)^4} - \frac{x(x-1)}{x(x-1)^4} + \frac{x}{x(x-1)^4} \\ &= \frac{(x-1)^4 - x(x-1)^3 + x(x-1)^2 - x(x-1) + x}{x(x-1)^4} \\ &= \frac{(x-1)\left((x-1)^3 - x(x-1^2 + x(x-1) - x\right) + x}{x(x-1)^4} \\ &= \frac{(x-1)\left(x^3 - 3x^2 + 3x + 1 - x\left(x^2 - 2x + 1\right) + x^2 - x - x\right) + x}{x(x-1)^4} \\ &= \frac{(x-1)\left(x^3 - 2x^2 + x - 1 - x^3 + 2x^2 - x\right) + x}{x(x-1)^4} \\ &= \frac{-(x-1) + x}{x(x-1)^4} \\ &= \frac{1}{x(x-1)^4} \end{aligned}$$

(3). On a : $\forall t\in\mathbb{R},\quad q(t)$

$$\begin{aligned}
q(t) &= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1+t^2+1}{1+t^2}}}}\\
&= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1+t^2}{2+t^2}}}\\
&= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{2t^2+1+t^2}{2+t^2}}}\\
&= \cfrac{1}{1+\cfrac{2+t^2}{3+2t^2}}\\
&= \cfrac{1}{\cfrac{3+2t^2+2+t^2}{3+2t^2}}\\
&= \frac{3+2t^2}{5+3t^2}
\end{aligned}$$

Exercice| [2441] | 2| Polynôme de degré 2

La fonction $f : x \longmapsto \left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^3 + \left(1-\sqrt{1+x^2}\right)^3$ est-elle une fonction polynôme de degré 2 ? Si oui, justifier.

Éléments de correction

Les développements de $\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^3$ et $\left(1-\sqrt{1+x^2}\right)^3$ donnent :

$$\begin{aligned}
\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^3 &= 1+3\sqrt{1+x^2}+3\left(1+x^2\right)^2+\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}\\
&= 4+4\sqrt{1+x^2}+3x^2+x^2\sqrt{1+x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(1-\sqrt{1+x^2}\right)^3 &= 1-3\sqrt{1+x^2}+3\left(1+x^2\right)^2-\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}\\
&= 4-4\sqrt{1+x^2}+3x^2-x^2\sqrt{1+x^2}
\end{aligned}$$

et ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\quad f(x)=8+6x^2$ qui est bien l'expression d'un polynôme de degré 2.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4997] | 3| Résolution d'une équation de degré 4

On veut résoudre l'équation : $\quad (E) : \quad 2x^4-9x^3+14x^2-9x+2=0$

(1). 0 est-il solution de (E) ?

(2). Établir alors que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E_1) où :

$$(E_1) : \quad 2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0$$

(3). On pose $u=x+\dfrac{1}{x}$

(a). Établir que l'équation (E_1) est équivalente à $\begin{cases} u=x+\dfrac{1}{x}\\ 2u^2-9u+10=0\end{cases}$.

(b). Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2u^2-9u+10=0$.

(c). En déduire les solutions de (E).

Éléments de correction

(1). 0 n'est clairement pas solution puisque si l'on substitue la valeur 0 à x, il restera le terme constant qui est égal à 2.

(2). Puisque $x=0$ n'est pas solution on peut supposer pour la suite que $x \neq 0$.
On commence alors par remarquer que : $(E) \quad \Leftrightarrow \quad 2\left(x^2+2\right)-9\left(x^3+x\right)+14x^2=0.$

En factorisant par x^2 qui est non nul, on obtient alors : $(E) \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-9x^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+14x^2=0$

ou encore puisque $x^2 \neq 0$:

$$\begin{aligned}(E) \quad & \Leftrightarrow \quad \left(x^2\left(2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14\right)=0\right)\\ & \Leftrightarrow \quad \left(2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0\right)\end{aligned}$$

ce qui donne bien l'équation (E_1).

(3).(a). On a : $u^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$, ce qui donne : $\quad x^2+\dfrac{1}{x^2}=u^2-2$. Ainsi :

$$\begin{aligned}(E_1) \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u=x+\dfrac{1}{x}\\ 2\left(u^2-2\right)-9u+14=0\end{cases}\\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u=x+\dfrac{1}{x}\\ 2u^2-9u+10=0\end{cases}\end{aligned}$$

(b). L'équation $2u^2-9u+10=0$ est une équation de degré 2 de discriminant $\Delta=(-9)^2-4\times 2\times 10=1$, et qui possède ainsi deux solutions : $u_1=\dfrac{-(-9)+\sqrt{1}}{2\times 2}=\dfrac{5}{2}$ et $x_2=\dfrac{-(-9)-\sqrt{1}}{2\times 2}=2$.

(c). On doit donc résoudre les deux équations suivantes pour obtenir les solutions de (E) :

$$(e_1): \quad x+\frac{1}{x}=2$$

Comme on a $x \neq 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}(e_1) \quad & \Leftrightarrow \quad \left(x^2+1=2x\right)\\ & \Leftrightarrow \quad \left(x^2-2x+1=0\right)\end{aligned}$$

et où l'on reconnaît une identité remarquable : $x^2-2x+1=(x-1)^2$, ce qui donne $x=1$ comme seule solution à (e_1).

$$(e_2): \quad x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$$

Comme on a $x \neq 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}(e_2) \quad & \Leftrightarrow \quad \left(x^2+1=\frac{5}{2}x\right)\\ & \Leftrightarrow \quad \left(x^2-\frac{5}{2}x+1=0\right)\end{aligned}$$

où l'on retrouve une équation de degré 2 qui a pour solutions $x_1=\dfrac{1}{2}$ et $x_2=2$.

Par conséquent, les solutions de (E) sont : $\left\{\dfrac{1}{2},1,2\right\}$.