Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2089

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): \quad z^2-(5-7\mathrm{i})z-4-19\mathrm{i}=0.$

EX. 2 | Réf. 2378

Soit $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1. Déterminer les racines carrées de z, que l'on notera ζ_1 et ζ_2 pour la suite.
2. Déterminer le module et un argument de z, puis donner sa forme exponentielle.
3. En déduire la forme exponentielle de ζ_1 et ζ_2.
4. Montrer alors que $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 3031

On se propose dans cet exercice de résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} (E): \quad y''+4y'+4y=\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{1+x^2} \\ y(0)=-1 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

1. **Question préliminaire :** calculer la dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g : x \longmapsto x\arctan(x)-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$.
2. Déterminer les solutions de l'équation homogène (E_H) associée à (E).
3. On se propose de chercher une solution particulière y_0 de (E) sur $\mathbb{R}$ sous la forme :
   $\forall x\in\mathbb{R},\quad y_0(x)=\mathrm{e}^{-2x}\times z(x)$ où z est une fonction que l'on déterminera.
   a. Montrer que : (y_0 est solution de (E) sur $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$ $\left(\forall x\in\mathbb{R},\quad z''(x)=\dfrac{1}{1+x^2}\right)$.
   b. En déduire l'expression de z puis y_0.
4. Donner alors les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
5. Résoudre alors le problème de Cauchy demandé.