Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 4614

On considère la série numérique $\sum_{n\geq 1} u_n$ où : $u_n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right)}$.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série numérique convergente.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \tan\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$.
3. Déduire de ce qui précède $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

EX. 2 | Réf. 4613

Dans tout cet exercice, α désignera une réel strictement positif. On considère alors $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite dont le terme général est donné par : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ u_n = \dfrac{1}{(n-1)^\alpha} + \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} - \dfrac{2}{n^\alpha}$

1. Montrer que la série numérique de terme général u_n est convergente et que $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = 1 - \dfrac{1}{2^\alpha}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par R_n le reste d'ordre n de la série numérique de terme général u_n.
Montrer que $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$.

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 4615

Dans tout cet exercice, on supposera que $\sum a_n$ est une série numérique absolument convergente à termes strictement positifs.

1. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2|xy| \leq x^2 + y^2$.
2. Montrer que la série numérique de terme général $\dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$ est convergente.

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 4616

On définit la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{n}$.

1. Montrer que la série numérique de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ n'est pas absolument convergente.

2. Montrer que les deux suites extraites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes.
3. Qu'en déduire pour la série numérique de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$?

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 1396

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose, sous réserve de convergence, $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que l'intégrale I_1 est divergente.
2. Montrer, grâce à une intégration par partie, que l'intégrale I_n est convergente pour $n \geq 2$ et calculer sa valeur.
3. Démontrer que pour tout $k \geq 3$, on a l'inégalité $\dfrac{\ln(k)}{k^2} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
4. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{\ln(k)}{k^2}$.