Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

Exercice| [4087] | 1| Base d'un espace de polynômes

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$, on considère la famille $\mathcal{B} = \big(x^3, x^2(x-2), x(x-2)^2, (x-2)^3\big)$.

(1). Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

(2). Déterminer les coordonnées du polynôme $P : x \longmapsto x^3 + 2x - 2$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice| [1368] | 2| Changement de base pour un endomorphisme

On désigne par $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et on considère $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tel que : $\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Dans tout l'exercice on notera $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

(1). Exprimer A^2 en fonction de A et de I_3.
En déduire que la matrice A est inversible, et déterminer alors A^{-1}.

(2). Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(3). Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$ et $v_3 = (0, 1, -1)$, est une base de $\mathbb{R}^3$.

(4). Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.

Avec plus d'autonomie...

Exercice| [4093] | 3| Étude d'un endomorphisme

On considère l'application $\quad f : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a-b & a-c \\ d & b \end{pmatrix} \end{array}\right.$. f est-il un automorphisme ?

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4075] | 4| Applications linéaires

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Pour tout réel a différent de 1, on considère l'endomorphisme f_a de l'espace vectoriel E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$M_a = \begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit de plus $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille de vecteurs de E définie par : $\left\{\begin{array}{l} e'_1 = a^2 e_1 + a e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_3 = 2e_1 + e_2 \end{array}\right.$

(1). Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la matrice M_a n'est pas inversible.

(2). En déduire les valeurs de a pour lesquelles f_a est un automorphisme.

(3). Prouver que $\mathcal{B}'$ est une base de E.

(4). Calculer $f_a\left(e'_1\right)$, $f_a\left(e'_2\right)$ et $f_a\left(e'_3\right)$.

(5). En déduire la matrice de f_a relativement à la base $\mathcal{B}'$.