Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2376

On se propose dans cet exercice de calculer la valeur de la somme : $S = \dfrac{1}{2} + \cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\dfrac{6\pi}{7}\right)$

Pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, on note $z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{7}}$.

1. **a.** Vérifier que, pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $(z_k)^7 = 1$.

   b. Donner alors la valeur de la somme $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{6} z_k$. Justifier votre réponse.

   c. Donner la forme algébrique des complexes z_k pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

   d. Justifier que : $z_6 = \overline{z_1}$, $z_5 = \overline{z_2}$ et $z_4 = \overline{z_3}$.

2. Montrer que : $A = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{3} 2\mathrm{Re}\,(z_k)$.

3. Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, exprimer z_k en fonction de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$, $\cos\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{6\pi}{7}\right)$, $\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$, $\sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{6\pi}{7}\right)$, puis donner $\mathrm{Re}\,(z_k)$.

4. Que vaut alors S ? Justifier.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2376

1. **a.** Il suffit de calculer...

   b. Pensez aux racines n^{e} de l'unité.

   c. Mettre z_j sous forme trigonométrique pour en déduire la forme algébrique.

   d. On peut se servir directement de la question précédente ou faire un raisonnement sur les arguments des z_k.

2. Se rappeler que $\mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$.

3. Se laisser guider par la question.

4. Conclure à l'aide de la question précédente.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2375

Le but de ce problème consiste en la recherche d'une expression plus simple de la fonction f définie par :

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$$

1. Soit $u : \left|\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} \end{array}\right.$.

   a. Montrer que u est une fonction paire.

   b. Étudier les variations de u sur $\mathbb{R}$.

   c. En déduire le domaine de définition de f.

2. Étudier la parité de la fonction f. Que peut-on en déduire pour l'étude de f ?
3. Montrer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\quad f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$.
4. Calculer $f(1)$ puis donner une expression de f à l'aide d'une autre fonction trigonométrique réciproque sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

   On pourra remarquer que $\dfrac{2}{1+x^2} = 2 \times \dfrac{1}{1+x^2} \ldots$
5. Que vaut $f(0)$? L'expression proposée à la question précédente est-elle encore valable ?
6. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Intepréter graphiquement.
7. Dresser le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$.
8. Que vaut $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$? Interpréter graphiquement le résultat.
9. Construire la représentation graphique de $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$ en rouge, puis compléter en vert son tracé sur $]-\infty;0[$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2375

1. **a.** S'assurer que $\mathcal{D}_u$ est symétrique par rapport à 0, puis calculer $u(-x)$.

   b. Calculer $u'(x)$, la limite de u en $+\infty$ et obtenir le tableau de variation sur $\mathbb{R}_+$ pour en déduire ensuite celui sur $\mathbb{R}$.

   c. Remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq u(x) \leq 1$ et l'utiliser pour déterminer $\mathcal{D}_f$.
2. S'assurer que $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0, puis calculer $f(-x)$.
3. Il s'agit d'une composée du type $f \circ u$ où l'on a déjà calculé u'.
4. On évalue f en 1 et comme f' correspond (à peu de chose près) à la dérivée d'une fonction trigonométrique réciproque, ces dernières sont égales à une constante additive près qu'il suffit de déterminer.
5. Calculer $f(0)$ et conclure pour l'expression de f sur $\mathbb{R}_+$.
6. C'est une limite d'une composée dont un élément est un quotient de polynômes dont on cherche la limite en $+\infty$.
7. C'est direct lorsque l'on a identifié l'expression de f !
8. Penser au nombre dérivé...
9. À faire !