Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 1791

Soit $u = \sqrt{2-\sqrt{2}} - \mathrm{i}\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Calculer u^2 et u^4, puis le module et un argument de u.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1791

- Calculer u^2 puis remarquer que $u^4 = \left(u^2\right)^2$;
- Penser que $|z^n|$ et $|z|$ sont liés, ainsi que $\arg\left(z^z\right)$ et $\arg(z)$.

EX. 2 | Réf. 1895

Résoudre le système $\mathcal{S}$ d'inconnues x, y et z réels strictements positifs ci-contre.

$$\mathcal{S} \quad : \quad \begin{cases} x^3y^2z^6 & = 1 \\ x^4y^5z^{12} & = 2 \\ x^2y^2z^5 & = 3 \end{cases}$$

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1895

- Ce n'est pas un système linéaire, donc on ne peut pas y appliquer l'algorithme de Gauss !
- L'indication $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$ doit nous mettre la puce à l'oreille...
- Le problème est de se ramener à un système linéaire, c'est à dire où il y a des sommes et non des produits.
- Et quoi de mieux qu'un logarithme pour transformer un produit en somme !
- On a alors un système linéaire dont les inconnues sont alors...

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2312

Soit (E) l'équation différentielle : $\quad (E) : \quad y'' - 3y' + 2y = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}}{2}$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2312

- Bien respecter le plan de résolution d'une EDL2.
- La méthode de superposition des solutions pour la recherche d'une solution particulière est à mettre en oeuvre dès lors que l'on aura transformé son second membre.
- C'est un problème de Cauchy à résoudre.

On pourra s'aider de la trame de rédaction suivante pour procéder à sa résolution :

- **Résolution de l'équation homogène :** soit (E_H) : $\boxed{\quad}$ l'équation homogène associée en (E), et (E_C) : $\boxed{\quad}$ l'équation caractéristique associée.
  Les solutions de (E_C) sont $\boxed{\quad}$. On en conclut ainsi que les solutions sur $\boxed{\quad}$ de (E_H) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto \boxed{\quad}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$
- **Recherche d'une solution particulère de (E) à l'aide du principe de superposition des solutions :** on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}}{2} = \boxed{\quad}$.
  On note alors $\begin{cases} (E_1) : \boxed{\quad} \\ (E_2) : \boxed{\quad} \end{cases}$ et on va ainsi chercher une solution particulière y_1 sur $\boxed{\quad}$ de (E_1), et une solution particulière y_2 de (E_2) sur $\boxed{\quad}$.

  $\hookrightarrow$ **Recherche d'une solution particulière de (E_1) :** le second membre de (E_1) étant de la forme $x \longmapsto C\mathrm{e}^{\omega x}$ avec $C = \boxed{\quad}$ et $\omega = \boxed{\quad}$, puisque ω $\boxed{\quad}$ racine de l'équation caractéristique, on va chercher y_1 sous la forme $y_1(x) = \boxed{\quad}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est à déterminer. On a :

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_1(x) = \boxed{\quad}$$
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_1'(x) = \boxed{\quad}$$
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_1''(x) = \boxed{\quad}$$

  Ainsi : y_1 est solution de (E_1) sur $\boxed{\quad}$ $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\quad}$
  $\Leftrightarrow$ ...
  $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\quad} = \boxed{\quad}$

  Ainsi, par identification, il vient $\alpha = \boxed{\quad}$ et par suite : $\forall x \in \boxed{\quad}$, $y_1(x) = \boxed{\quad}$

  $\hookrightarrow$ **Recherche d'une solution particulière de (E_2) :** *on procède de même...*

  Finalement, d'après le principe de superposition des solutions, la fonction $y_0 : x \longmapsto \boxed{\quad}$ est une solution particulière de (E) sur $\boxed{\quad}$.
- **Solution de (E) sur $\boxed{\quad}$:** les solutions de (E) sur $\boxed{\quad}$ sont les fonctions de la forme : $x :\longmapsto \boxed{\quad} + \boxed{\quad}$
- **Problème de Cauchy :** on cherche la solution f de (E) sur $\boxed{\quad}$ qui vérifie $\boxed{\quad}$ et $\boxed{\quad}$.
  Comme f est solution de (E) sur $\boxed{\quad}$, f est de la forme : $\forall x \in \boxed{\quad}$ où l'on doit déterminer C_1 et C_2 à l'aide de $f(0) = \boxed{\quad}$ et $f'(0) = \boxed{\quad}$. On a : $f(0) = \begin{cases} \boxed{\quad} & \text{d'après l'expression de } f \\ \boxed{\quad} & \text{car c'est ce que l'on veut} \end{cases}$. On en déduit que $\boxed{\quad}$.
  Par ailleurs, pour tout $x \in \boxed{\quad}$, $f'(x) = \boxed{\quad}$.
  Ainsi : $f'(0) = \begin{cases} \boxed{\quad} & \text{d'après l'expression de } f' \\ \boxed{\quad} & \text{car c'est ce que l'on veut} \end{cases}$. On en déduit que $\boxed{\quad}$.
  On résout alors le système $\left\{ \boxed{\quad} \right.$ qui donne $C_1 = \boxed{\quad}$ et $C_2 = \boxed{\quad}$. Finalement : $\forall x \in \boxed{\quad}$, $f(x) = \boxed{\quad}$.