Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 4614

On considère la série numérique $\sum_{n\geq 1} u_n$ où : $u_n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right)}$.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série numérique convergente.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \tan\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$.
3. Déduire de ce qui précède $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4614

1. Un équivalent du dénominateur s'obtient par simple passage à la limite, et pour le numérateur, c'est un équivalent usuel. On mobilise alors le théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs pour conclure, en ayant au préalable justifié le signe...
2. On mobilisera les formules de trigonométriques, notamment celle donnant $\sin(a+b)$...en remarquant que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.
3. On en revient à la définition de la somme d'une série numérique : c'est la limite de la suite des sommes partielles.

EX. 2 | Réf. 4613

Dans tout cet exercice, α désignera une réel strictement positif. On considère alors $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite dont le terme général est donné par : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ u_n = \dfrac{1}{(n-1)^\alpha} + \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} - \dfrac{2}{n^\alpha}$

1. Montrer que la série numérique de terme général u_n est convergente et que $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = 1 - \dfrac{1}{2^\alpha}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par R_n le reste d'ordre n de la série numérique de terme général u_n.
   Montrer que $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4613

1. On reviendra à la suite des sommes partielles, dont on calculera l'expression à l'aide d'un téléscopage en remarquant que $2 = 1+1$ pour ensuite passer à la limite et obtenir la convergence et la somme.
2. On rappelle que $R_n = \left(\sum_{n=2}^{+\infty} u_n\right) - S_n$ où S_n désigne la somme partielle de la série numérique, et il restera alors à faire un développement limité de l'expression obtenue.

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 4615

Dans tout cet exercice, on supposera que $\sum a_n$ est une série numérique absolument convergente à termes strictement positifs.

1. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2\,|xy| \leq x^2 + y^2$.
2. Montrer que la série numérique de terme général $\dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$ est convergente.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4615

1. On pourra commencer par remarquer que $(|x| - |y|)^2 \geq 0$ et obtenir ainsi l'inégalité souhaitée.
2. On utilisera l'inégalité précédente qui nous permettra de majorer le terme général de la série considérée.

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 4616

On définit la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{n}$.

1. Montrer que la série numérique de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ n'est pas absolument convergente.
2. Montrer que les deux suites extraites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes.
3. Qu'en déduire pour la série numérique de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$?

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4616

1. On se contentera de voir qu'en prenant la valeur absolue du terme général, on obtient le terme général d'une série de Riemann divergente.
2. On écrira soigneusement l'expression des termes généraux de ces deux suites extraites, pour ensuite s'assurer que ces deux suites sont adjacentes.
3. Les deux suites considérées sont les deux suites extraites des termes d'indices pairs et impairs de la suite des sommes partielles, et comme elles sont adjacentes...

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 1396

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose, sous réserve de convergence, $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que l'intégrale I_1 est divergente.
2. Montrer, grâce à une intégration par partie, que l'intégrale I_n est convergente pour $n \geq 2$ et calculer sa valeur.
3. Démontrer que pour tout $k \geq 3$, on a l'inégalité $\dfrac{\ln(k)}{k^2} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
4. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{\ln(k)}{k^2}$.

EX. 5 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1396

1. Une intégration par parties donne la réponse...
2. On se laisse guider...

3. Penser à utiliser la croissance de l'intégrale…
4. Le théorème de comparaison des séries à termes positifs est la clé…