Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Je m'entraîne à rédiger

EX. 1 | Réf. 0676

1. Pour $n \geq 0$, on définit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)}\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}\,\mathrm{d}x$.
   Étudier leur convergence.
2. Montrer leur égalité à l'aide du changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$
3. Calculer I_n.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0676

1. Penser au théorème de majoration...
2. RAS
3. Que vaut $2I_n$?

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1396

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose, sous réserve de convergence, $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que l'intégrale I_1 est divergente.
2. Montrer, grâce à une intégration par partie, que l'intégrale I_n est convergente pour $n \geq 2$ et calculer sa valeur.
3. Démontrer que pour tout $k \geq 3$, on a l'inégalité $\dfrac{\ln(k)}{k^2} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
4. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{\ln(k)}{k^2}$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1396

1. Une intégration par parties donne la réponse...
2. On se laisse guider...
3. Penser à utiliser la croissance de l'intégrale...
4. Le théorème de comparaison des séries à termes positifs est la clé...

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 1494

Soit H la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$H(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

1. **a.** Montrer que H est bien définie sur $[0;+\infty[$.

   b. Montrer que la fonction H est dérivable sur $[0;+\infty[$, puis montrer que :

   $$\forall x\in[0;+\infty[\,,\quad H'(x)=-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$$

   Justifier alors que H et de classe $\mathcal{C}^1$sur $[0;+\infty[$.

   On pourra remarquer que : $\forall x\geq 0,\quad H(x)=H(0)-\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$

2. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}xH(x)=0.$

3. On pose $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}H(x)\,\mathrm{d}x.$

   a. Montrer que I converge.

   b. Déterminer sa valeur en fonction de $H(0)$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1494

1. **a.** Le théorème de comparaison sur $[x;+\infty[$ permet de répondre.

   b. Utiliser la relation de Chasles et le théorème fondamental de l'analyse.

2. Il y a un majoration évidente par e^{-t} de la fonction à intégrer.

3. **a.** On exploite la maojoration précédente pour faire fonctionner le théorème d'encadrement des limites.

   b. RAS

EX. 4 | Réf. 1106

Pour $x>0$, on pose $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\arctan(t)\,\mathrm{d}t.$

1. Montrer que l'intégrale définissant $f(x)$ est convergente pour $x>0$.

2. À l'aide de deux intégrations par parties sucessives, prouver que :

   $$\forall x>0, x^2f(x)=1-\int_0^{+\infty}\frac{2t}{\left(1+t^2\right)^2}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

3. En déduire que : $\forall x>0, 0\leq 1-x^2f(x)\leq\dfrac{1}{x}.$

4. Déterminer alors un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1106

1. Le théorème de comparaison. . .
2. On effectue les deux IPP en dérivant la fonction arctangente deux fois.
3. Remarquer que $2t\leq\left(1+t^2\right)^2$
4. On exploite le résultat précédent.