À noter & À garder en tête

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

Exercice| [5002] | 1| Mélange de lois | ESCP 2001 Filière ECS

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$ et Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit Z la variable aléatoire définie par : $\begin{cases} Z = 0 & \text{si} \quad X = 0 \\ Z = Y & \text{si} \quad X = 1 \end{cases}$

(1). Déterminer le support de Z.

(2). À l'aide du système complet d'événements $\{[X=0], [X=1]\}$, montrer que $\mathbb{P}([Z=0]) = 1 - p + p\mathrm{e}^{-\lambda}$.

(3). Déterminer la loi de Z.

(4). Montrer que Z admet une espérance, et la calculer.

(5). Calculer ensuite $\mathbb{P}_{[Z=0]}([X=1])$.

Pistes de réflexion

(1). Le support de Z est clairement obtenu à l'aide de la réunion des supports de Y et de Z.

(2). On essaiera de montrer que les deux événements $[X=0] \cap [Z=0]$ et $[X=1] \cap [Z=1]$ se ramènent à des événements portant seulement sur X et Y.

(3). On reprendra le même raisonnement qu'à la question précédente pour montrer que $\mathbb{P}([Z=k]) = p\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

(4). Z étant une variable aléatoire discrète, il s'agira de montrer la convergence absolue d'une série pour s'assurer de l'existence de son espérance, et d'en calculer la somme ensuite. On pourra remarquer qu'il y a un fort lien entre la loi de Z et celle de Y, et que la convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes.

(5). On pourra revenir à la formule de Bayes par exemple, ou la redémontrer., toujours à du l'aide du système complet d'événements $\{[X=0], [X=1]\}$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [5001] | 2| Tirage de jetons dans une urne | GE2 2015 Filière BCPST

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère N urnes numérotées de 1 à N telles que pour chaque $i \in [\![1;N]\!]$, l'urne numérotée i contient i jetons numérotés de 1 à i.
On considère l'épreuve aléatoire consistant en une suite de tirages selon les règles suivantes :

- le premier tirage est effectué dans l'urne numérotée N ;
- si le jeton obtenu au k^{e} tirage porte le numéro i, alors le $(k+1)^{\mathrm{e}}$ tirage est effectué dans l'urne numérotée i ;,
- les différents jetons d'une même urne sont tirés de manière équiprobable.

On note pour chaque k entier naturel non nul, X_k la variable aléatoire donnant le numéro du jeton obtenu au k^{e} tirage.

(1). Quelle est la loi de X_1 ?

(2). Établir que, pour tout entier naturel non nul et $i \in [\![1;N]\!]$: $\quad \mathbb{P}([X_{k+1} = i]) = \displaystyle\sum_{j=i}^{N} \frac{1}{j}\mathbb{P}([X_k = j])$.

(3). Montrer que pour tout k entier naturel non nul, la suite finie $(\mathbb{P}([X_k = i]))_{1 \leq i \leq N}$ est décroissante.

(4).(a). Montrer que la suite $(\mathbb{P}([X_k = 1]))_{k \in \mathbb{N}*}$ est croissante, puis justifier qu'elle est convergente.

(b). Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}([X_{k+1} = 1]) \geq \mathbb{P}([X_k = 1]) + \dfrac{1}{N}(1 - \mathbb{P}([X_k = 1]))$.

(c). En déduire que $\mathbb{P}([X_k = 1]) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

(5). On fixe un entier naturel i compris entre 2 et N.
Déduire de la question précédente que pour tout $i \in [\![2; N]\!]$, on a $\mathbb{P}([X_k = i]) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Pistes de réflexion

(1). C'est clairement une situation d'équiprobabilité lors du premier tirage pour identifier le support de X_1.

(2). On commencera par expliciter le support de la loi de X_{k+1}, puis sa loi, qui est clairement conditionnée par le numéro tiré lors du k^{e}tirage. On pourra observer à ce propos que la loi conditionnelle de X_{k+1} sachant $[X_k = j]$ est la loi uniforme sur $[\![1; j]\!]$.

(3). On pourra distinguer le cas $k = 1$ et le cas $k \geq 2$ pour étudier les variations de cette suite en étudiant le signe de la différence de deux termes successifs.

(4).(a). On procèdera comme à la question précédente en étudiant la différence de deux termes successifs. Et c'est une suite croissante de probabilités donc majorées par $1\ldots$

(b). La question précédente a dû permettre de mettre en évidence un lien entre $\mathbb{P}([X_{k+1} = 1])$ et $\mathbb{P}([X_k = 1])$, et On se contentera de minorer le terme général de la somme qui intervient dans cette relation. Il restera à faire intervenir un système complet d'événements pour transformer ensuite la somme restante.

(c). La suite $(\mathbb{P}([X_k = 1]))_{k \in \mathbb{N}^*}$ étant convergente, on passe à la limite dans l'inégalité précédente pour en déduire une condition supplémentaire sur cette dernière et par suite, sa valeur.

(5). A l'aide des événements $([X_k = j])_{j \in [\![1; N]\!]}$ et le fait que la somme de leur probabilité vaut 1, on justifera proprement que $0 \leq \mathbb{P}([X_k = i]) \leq 1 - \mathbb{P}([X_k = 1])$ et on conclura avec le théorème d'encadrement.