À noter & À garder en tête

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

Exercice| [4087] | 1| Base d'un espace de polynômes

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$, on considère la famille $\mathcal{B} = \left(x^3, x^2(x-2), x(x-2)^2, (x-2)^3\right)$.

(1). Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

(2). Déterminer les coordonnées du polynôme $P : x \longmapsto x^3 + 2x - 2$ dans la base $\mathcal{B}$.

Pistes de réflexion

(1). Développer les polynômes constituant la famille $\mathcal{B}$ permettra d'écrire la matrice dans la base canonique de $\mathcal{R}_3[x]$ et de déterminer le rang de cette famille pour conclure.

(2). Il s'agira simplement d'utiliser les formules de changement de base.

Exercice| [1368] | 2| Changement de base pour un endomorphisme

On désigne par $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et on considère $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tel que : $\qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Dans tout l'exercice on notera $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

(1). Exprimer A^2 en fonction de A et de I_3.
En déduire que la matrice A est inversible, et déterminer alors A^{-1}.

(2). Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(3). Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$ et $v_3 = (0, 1, -1)$, est une base de $\mathbb{R}^3$.

(4). Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.

Pistes de réflexion

(1). On effectuera le calcul de A^2, la combinaison linéaire de A et I_3 étant évidente. On exploitera alors la relation $A^2 = \alpha A + \beta \mathrm{I}_3$ où (α, β) pour obtenir une relation du type $A \times$ Une matrice $= \mathrm{I}_3$ pour justifier l'inversibilité de A, et on l'utilisera pour déterminer A^{-1}.

(2). Il y a un lien entre le caractère bijectif de f et l'inversibilité de A.

(3). On pourra utiliser le théorème de caractérisation des bases en dimension finie portant sur l'inversibilité de la matrice de la famille de vecteurs.

(4). Il s'agira d'obtenir « à moindre coût » les images des vecteurs $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$ en fonction des vecteurs de $\mathcal{C}$ pour obtenir $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.

Avec plus d'autonomie...

Exercice| [4093] | 3| Étude d'un endomorphisme

On considère l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a-b & a-c \\ d & b \end{pmatrix} \end{array} \right.$. f est-il un automorphisme ?

Pistes de réflexion

- On commencera par s'assurer que l'on a bien affaire à une application linéaire (donc un endomorphisme).
- Pour s'intéresser à son caractère bijectif, on pourra par exemple mobiliser le théorème de caractérisation des automorphismes en dimension finie dans sa version matricielle.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4075] | 4| Applications linéaires

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Pour tout réel a différent de 1, on considère l'endomorphisme f_a de l'espace vectoriel E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$M_a = \begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit de plus $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille de vecteurs de E définie par : $\begin{cases} e'_1 = a^2 e_1 + a e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_3 = 2e_1 + e_2 \end{cases}$

(1). Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la matrice M_a n'est pas inversible.

(2). En déduire les valeurs de a pour lesquelles f_a est un automorphisme.

(3). Prouver que $\mathcal{B}'$ est une base de E.

(4). Calculer $f_a(e'_1)$, $f_a(e'_2)$ et $f_a(e'_3)$.

(5). En déduire la matrice de f_a relativement à la base $\mathcal{B}'$.

Pistes de réflexion

(1). On pourra procéder à une recherche du rang de M_a en fonction de a pour déterminer les valeurs de a donnant une matrice M_a non inversible.

(2). On pourra utiliser le théorème de caractérisation des endomorphismes bijectifs en dimension finie dans sa version matricielle.

(3). On pourra montrer que la famille $\mathcal{B}'$ est de rang 3, ce qui suffira pour avoir son caractère libre, puis son caractère base.

(4). On pensera à utiliser la linéarité de f_a pour calculer les images demandées ou utiliser l'expression matricielle M_a de f_a dans $\mathcal{B}$.

(5). Le plus rapide sera peut-être d'utiliser les formules de changement de bases pour les endomorphismes à moins de réussir à exprimer $f_a(e'_1)$, $f_a(e'_2)$ et $f_a(e'_3)$ en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}'$.