Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2089

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : \quad z^2 - (5-7\mathrm{i})z - 4 - 19\mathrm{i} = 0.$

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2089

On reconnaît une équation de degré 2 à coefficients complexes.
Son discriminant Δ vaut : $(-(5-7\mathrm{i}))^2 - 4\times 1\times(-4-19\mathrm{i}) = -8+6\mathrm{i}$.
On doit déterminer un complexe δ qui vérifie $\delta^2 = \Delta$.
En posant $\delta = a + \mathrm{i}\,b$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on en déduit que $\delta^2 = a^2 - b^2 + 2ab\mathrm{i}$, et en utilisant la condition $|\Delta| = |\delta|^2$, c'est à dire $a^2+b^2 = \sqrt{(-8)^2+(6)^2} = \sqrt{100} = 10$, il vient :

$$\delta^2 = \Delta \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a^2-b^2=-8\\ a^2+b^2=10\\ 2ab=6\end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a^2-b^2=-8\\ 2b^2=18\\ 2ab=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=-8\\ b^2=9\\ 2ab=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=1\\ b^2=9\\ 2ab=-14\end{cases}$$

La relation $2ab=6$ permet d'affirmer que a et b sont de même signe. Ce système a donc pour solution les couples $(1,3)$ et $(-1,-3)$ comme solution.
On choisira $\delta = 1-7\mathrm{i}$, et par suite, les solutions dans $\mathbb{C}$ de (E) sont les deux complexes z_1 et z_2 donnés par :

$$z_1 = \frac{-(-(5-7\mathrm{i}))+(1+3\mathrm{i})}{2} = \frac{5-7\mathrm{i}+1+3\mathrm{i}}{2} = 3-2\mathrm{i} \qquad\text{et}\qquad z_2 = \frac{-(-(5-7\mathrm{i}))-(1+3\mathrm{i})}{2} = \frac{5-7\mathrm{i}-1-3\mathrm{i}}{2} = 2-5\mathrm{i}$$

EX. 2 | Réf. 2378

Soit $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1. Déterminer les racines carrées de z, que l'on notera ζ_1 et ζ_2 pour la suite.
2. Déterminer le module et un argument de z, puis donner sa forme exponentielle.
3. En déduire la forme exponentielle de ζ_1 et ζ_2.
4. Montrer alors que $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2378

1. On cherche donc un complexe $\zeta = x + \mathrm{i}\,y$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\zeta^2 = z$. Il s'agit donc de résoudre le système $\begin{cases} x^2-y^2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ x^2+y^2=1\\ 2xy=1\end{cases}$. Par suite, on trouve que $x = \pm\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $y = \pm\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Or le produit xy étant positif, il vient que x et y sont nécessairement de même signe, et on obtient ainsi : $\zeta_1 = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $\zeta_2 = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$.
2. Il est immédiat que $|z| = 1$ et un argument de z est $\dfrac{\pi}{4}$, et donc $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$.
3. Puisque $\zeta_1^2 = z$, il vient que $\zeta_1^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$. Il vient donc que $\left|\zeta_1^2\right| = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\right|$ c'est à dire $|\zeta_1|^2 = 1$ et donc $|\zeta_1| = 1$ car un module est toujours positif. De plus $\arg\left(\zeta_1^2\right) = 2\arg(\zeta_1) + 2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$. Par suite, $\arg(\zeta_1) = \dfrac{\pi}{8} + k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$. Or $\mathrm{Re}\,(\zeta_1) \geq 0$, donc on en déduit qu'un argument de ζ_1 est $\dfrac{\pi}{8}$.

Finalement, $\zeta_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{8}}$.
Or $\zeta_2 = -\zeta_1$, donc $\zeta_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{8}}$ et donc $\zeta_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{8}}$.

4. On en déduit que $\zeta_1 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$, donc par identification $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 3031

On se propose dans cet exercice de résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} (E) : \quad y'' + 4y' + 4y = \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{1+x^2} \\ y(0) = -1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. **Question préliminaire :** calculer la dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g : x \longmapsto x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$.

2. Déterminer les solutions de l'équation homogène (E_H) associée à (E).

3. On se propose de chercher une solution particulière y_0 de (E) sur $\mathbb{R}$ sous la forme :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_0(x) = \mathrm{e}^{-2x} \times z(x)$ où z est une fonction que l'on déterminera.

a. Montrer que : $(y_0$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall x \in \mathbb{R}, \quad z''(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\right)$.

b. En déduire l'expression de z puis y_0.

4. Donner alors les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

5. Résoudre alors le problème de Cauchy demandé.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 3031

1. On a directement que : $\forall x \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} \boxed{g'(x)} &= 1 \times \arctan(x) + x \times \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} \times \frac{2x}{1+x^2} \\ &= \arctan(x) + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} \\ &= \boxed{\arctan(x)} \end{aligned}$$

2. L'éqution homogène (E_H) associée à (E) est : $(E_H) : \quad y'' + 4y' + 4y = 0$.
L'équation caractéristique (E_c) associée à (E) est quant à elle : $(E_c) : \quad r^2 + 4r + 4 = 0$ qui a pour discriminant $\Delta = 0$ et par suite, ne possède qu'une seule solution $r_0 = -2$.
Ainsi, les solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ sont : $\boxed{x \longmapsto (\alpha x + \beta)\,\mathrm{e}^{-2x} \text{ où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2}$

3. a. On a donc directement que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad y_0'(x) &= z'(x)\mathrm{e}^{-2x} - 2z(x)\mathrm{e}^{-2x} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad y_0''(x) &= z''(x)\mathrm{e}^{-2x} - 4z'(x)\mathrm{e}^{-2x} + 4z(x)\mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} (y_0 \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}) &\Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_0''(x) + 4y_0'(x) + 4y_0(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1+x^2}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, \quad z''(x)\mathrm{e}^{-2x} - 4z'(x)\mathrm{e}^{-2x} + 4z(x)\mathrm{e}^{-2x} + 4\left(z'(x)\mathrm{e}^{-2x} - 2z(x)\mathrm{e}^{-2x}\right.\right. \\ &\Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, \quad z''(x)\mathrm{e}^{-2x} = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1+x^2}\right) \end{aligned}$$

b. On en déduit donc que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad z'(x) = \arctan(x) + C$ où $C \in \mathbb{R}$
Puis d'après la première question que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad z(x) = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + Cx + D$ où $(C, D) \in \mathbb{R}$.
Par conséquent, une solution particulière y_0 de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_0(x) = \left(x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + Cx + D\right)} \text{ où } (C, D) \in \mathbb{R}^2.$$

4. Après regroupement des termes et arrangement des constantes de primitivitation, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions :

$$\boxed{x \longmapsto \left(Ax + B + x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right)\mathrm{e}^{-2x} \text{ où } (A, B) \in \mathbb{R}^2}$$

5. On cherche la fonction f solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = -1$ et $f'(0) = 1$.
Puisque f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \left(Ax + B + x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right)\mathrm{e}^{-2x}$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$
et ainsi $f(0) = 1$ donne : $\boxed{B = -1}$.
Par ailleurs, puisque : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (A + \arctan(x))\,\mathrm{e}^{-2x} - 2\left(Ax - 1 + x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right)\mathrm{e}^{-2x}$
il vient que $f'(0) = 1$ donnera : $\boxed{A = -1}$.

Par conséquent, la fonction f cherchée est : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(-x - 1 + x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right)\mathrm{e}^{-2x}}$