Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 1791

Soit $u = \sqrt{2-\sqrt{2}} - \mathrm{i}\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Calculer u^2 et u^4, puis le module et un argument de u.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 1791

On a :
$$\begin{aligned} u^2 &= 2-\sqrt{2}-2\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}+\mathrm{i}^2\left(2+\sqrt{2}\right)\\ &= -2\sqrt{2}-2\mathrm{i}\ \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}}_{=\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\sqrt{2}}\\ &= -2\sqrt{2}\,(1+\mathrm{i}) \end{aligned}$$
et par suite :
$$\begin{aligned} u^4 &= \left(u^2\right)^2\\ &= \left(-2\sqrt{2}\right)^2 \times (1+\mathrm{i})^2\\ &= 8\left(1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2\right)\\ &= 16\mathrm{i} \end{aligned}$$

Puisque $\left|u^4\right| = |u|^4$, on en déduit que $|u| = 2$. De même, $\arg\left(u^4\right) = 4\arg(u) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Comme un argument de $16\mathrm{i}$ est $\dfrac{\pi}{2}$, il vient que $\arg(u) = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$ ce qui donne quatre valeurs possibles pour la mesure principale d'un argument de u qui seront donc $\dfrac{\pi}{8}$, $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{5\pi}{8}$, $\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{3\pi}{8}$ et $\dfrac{\pi}{8}-\pi = -\dfrac{7\pi}{8}$. Or $\mathrm{Re}(u) > 0$ et $\mathrm{Im}(u) < 0$, donc on en déduit qu'un argument de u est $-\dfrac{3\pi}{8}$.

EX. 2 | Réf. 1895

Résoudre le système $\mathcal{S}$ d'inconnues x, y et z réels strictements positifs ci-contre.

$$\mathcal{S} \quad : \quad \begin{cases} x^3y^2z^6 &= 1\\ x^4y^5z^{12} &= 2\\ x^2y^2z^5 &= 3 \end{cases}$$

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 1895

Puisque l'on suppose que $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$, ce système est alors équivalent à :

$$\begin{cases} x^3y^2z^6 = 1\\ x^4y^5z^{12} = 2\\ x^2y^2z^5 = 3 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 3\ln(x)+2\ln(y)+6\ln(z) = 0\\ 4\ln(x)+5\ln(y)+12\ln(z) = \ln(2)\\ 2\ln(x)+2\ln(y)+5\ln(z) = \ln(3) \end{cases}$$

En posant $X = \ln(x)$, $Y = \ln(y)$ et $Z = \ln(z)$, on doit donc résoudre le système linéaire $\mathcal{S}'$: $\begin{cases} 3X+2Y+6Z = 0\\ 4X+5Y+12Z = \ln(2)\\ 2X+2Y+5Z = \ln(3) \end{cases}$.

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 12 & \ln(2) \\ 2 & 2 & 5 & \ln(3) \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{4}{3}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3}L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 4 & \ln(2) \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & \ln(3) \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{7}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 4 & \ln(2) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \ln(3) - \frac{2}{7}\ln(2) \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 28L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 42L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 42\ln(3) - 12\ln(2) \\ 0 & \frac{7}{3} & 0 & -7\ln(2) + 28\ln(3) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \ln(3) - \frac{2}{7}\ln(2) \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{6}{7}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 18\ln(3) - 6\ln(2) \\ 0 & \frac{7}{3} & 0 & -7\ln(2) + 28\ln(3) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \ln(3) - \frac{2}{7}\ln(2) \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{3}{7}L_2 \\ L_3 \leftarrow -7L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2\ln(2) + 6\ln(3) \\ 0 & 1 & 0 & -3\ln(2) + 12\ln(3) \\ 0 & 0 & 1 & -7\ln(3) + 2\ln(2) \end{array}\right)$$

et on en déduit : $\left\{\begin{array}{rcl} X & = & -2\ln(2) + 6\ln(3) \\ Y & = & -3\ln(2) + 12\ln(3) \\ Z & = & -7\ln(3) + 2\ln(2) \end{array}\right.$ puis que $\left\{\begin{array}{l} x = \mathrm{e}^{X} = \dfrac{3^6}{4} = \dfrac{729}{4} \\ y = \mathrm{e}^{Y} = \dfrac{3^{12}}{2^4} = \dfrac{531441}{8} \\ z = \mathrm{e}^{Z} = \dfrac{4}{3^7} = \dfrac{4}{2187} \end{array}\right.$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2312

Soit (E) l'équation différentielle : $\qquad (E): \quad y'' - 3y' + 2y = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}}{2}$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2312

1. L'équation différentielle (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Le second membre de (E) est clairement défini et continue sur $\mathbb{R}$. On peut donc tenter de résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
   - **Résolution de l'équation homogène :** soit $(E_H): \ y'' - 3y' + 2y = 0$ l'équation homogène associée en (E), et $(E_C): \ r^2 - 3r + 2 = 0$ l'équation caractéristique associée.
     Les solutions de (E_C) sont les deux réels $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. On en conclut ainsi que les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_H) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $\quad x \longmapsto C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{x}$ où $(c_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$
   - **Recherche d'une solution particulère de (E) :** on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{2} - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$.
     On va donc utiliser le principe de superposition des solutions pour déterminer une solution particulière de (E).
     On note alors $\left\{\begin{array}{l} (E_1): \ y'' - 3y' + 2y = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2} \\ (E_2): \ y'' - 3y' + 2y = -\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{2} \end{array}\right.$ et on va ainsi chercher une solution particulière y_1 sur $\mathbb{R}$ de (E_1), et une solution particulière y_2 de (E_2) sur $\mathbb{R}$. D'après le principe de superposition des solutions, la fonction y_0 définie par $y_0 = y_1 + y_2$ est alors une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
     ↪ **Recherche d'une solution particulère de (E_1) :** le second membre de (E_1) étant de la forme $x \longmapsto C\mathrm{e}^{\omega x}$ avec $C = \dfrac{1}{2}$ et $\omega = 2$, puisque ω est racine simple de l'équation caractéristique, on va chercher y_1 sous la forme

$y_1(x) = \alpha x \mathrm{e}^{2x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est à déterminer. On a :
$$\begin{array}{lrcl} \forall x \in \mathbb{R}, & y_1(x) & = & \alpha x \mathrm{e}^{2x} \\ \forall x \in \mathbb{R}, & y_1'(x) & = & \alpha \mathrm{e}^{2x} + 2\alpha x \mathrm{e}^{2x} \\ \forall x \in \mathbb{R}, & y_1''(x) & = & 2\alpha \mathrm{e}^{2x} + 2\alpha \mathrm{e}^{2x} + 4\alpha x \mathrm{e}^{2x} \\ & & = & 4\alpha \mathrm{e}^{2x} + 4x\alpha \mathrm{e}^{2x} \end{array}$$

Ainsi : y_1 est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad y_1''(x) - 3y_1(x) + 2y_1(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 4\alpha \mathrm{e}^{2x} + 4x\alpha \mathrm{e}^{2x} - 3\left(\alpha \mathrm{e}^{2x} + 2\alpha x \mathrm{e}^{2x}\right) + 2\alpha x \mathrm{e}^{2x} = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \alpha \mathrm{e}^{2x} = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, par identification, il vient $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et par suite : $\forall x \in \mathbb{R}, y_1(x) = \dfrac{1}{2} x \mathrm{e}^{2x}$

↪ **Recherche d'une solution particulière de** (E_2) **:** le second membre de (E_2) étant de la forme $x \longmapsto C\mathrm{e}^{\omega x}$ avec $C = \dfrac{1}{2}$ et $\omega = -2$, puisque ω est n'est pas racine de l'équation caractéristique, on va chercher y_2 sous la forme $y_2(x) = \beta \mathrm{e}^{2x}$ où $\beta \in \mathbb{R}$ est à déterminer. On a :
$$\begin{array}{lrcl} \forall x \in \mathbb{R}, & y_2(x) & = & \alpha \mathrm{e}^{-2x} \\ \forall x \in \mathbb{R}, & y_2'(x) & = & -2\alpha \mathrm{e}^{-2x} \\ \forall x \in \mathbb{R}, & y_2''(x) & = & 4\alpha \mathrm{e}^{-2x} \end{array}$$

Ainsi : y_2 est solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad y_2''(x) - 3y_2(x) + 2y_2(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 4\alpha \mathrm{e}^{-2x} - 3\left(-2\alpha \mathrm{e}^{-2x}\right) + 2\alpha \mathrm{e}^{-2x} = -\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 12\alpha \mathrm{e}^{-2x} = -\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, par identification, il vient $\alpha = -\dfrac{1}{24}$ et par suite : $\forall x \in \mathbb{R}, y_2(x) = -\dfrac{1}{24} \mathrm{e}^{-2x}$

Finalement, la fonction $y_0 : x \longmapsto -\dfrac{1}{24}\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{1}{2} x \mathrm{e}^{2x}$ est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.

- **Solution de** (E) **sur** $\mathbb{R}$ **:** les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme : $x :\longmapsto C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{24}\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{1}{2} x \mathrm{e}^{2x}$

2. D'après le théorème de Cauchy-Linéaire, il existe une unique solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$.

Comme f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, f est de la forme : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{24}\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{1}{2} x \mathrm{e}^{2x}$ où l'on déterminer C_1 et C_2 à l'aide de $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$. On a : $f(0) = \begin{cases} C_1 + C_2 - \dfrac{1}{24} \text{ d'après l'expression de } f \\ 1 \text{ car c'est ce que l'on veut} \end{cases}$.

On en déduit que $C_1 + C_2 = \dfrac{25}{24}$.

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{x} + \dfrac{1}{12}\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^{2x}$.

Ainsi : $f'(0) = \begin{cases} 2C_1 + C_2 + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{2} \text{ d'après l'expression de } f' \\ -1 \text{ car c'est ce que l'on veut} \end{cases}$. On en déduit que $2C_1 + C_2 = -\dfrac{19}{12}$.

On résout alors le système $\begin{cases} C_1 + C_2 = \dfrac{25}{24} \\ 2C_1 + C_2 = -\dfrac{19}{12} \end{cases}$ qui donne $C_1 = -\dfrac{21}{8}$ et $C_2 = \dfrac{11}{3}$. Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -\dfrac{21}{8}\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{11}{3}\mathrm{e}^{-2x} - \dfrac{1}{24}\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{1}{2} x \mathrm{e}^{2x}$.