Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le résultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4242

Résoudre sur $]-1;1[$ l'équation différentielle $(\star)$ d'inconnue la fonction $y : t \longmapsto y(t)$:

$$(\star) \quad \left(1-t^2\right) y'' - ty' + y = 0$$

en effectuant le changement de variable $t = \cos(x)$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4242

Étant donnée une fonction $y : t \longmapsto y(t)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1;1[$, on définit la fonction $z : x \longmapsto y(\cos(x))$.
Il vient alors que : $\forall x \in]0;\pi[$,

$$\begin{aligned} z'(x) &= \sin(x)y'(\cos(x)) \\ z''(x) &= -\cos(x)y'(\cos(x)) + \sin^2(x)y''(\cos(x)) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} y : t \longmapsto y(t) \text{ est} \\ \text{solution de } (\star) \text{ sur }]-1;1[\end{array}\right) &\Leftrightarrow \left(\forall t \in]-1;1[, \quad \left(1-t^2\right) y''(t) - ty'(t) + y(t) = 0\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\forall x \in]0;\pi[, \quad \left(1-\cos^2(x)\right) y''(\cos(x)) - \cos(x)y'(\cos(x)) + y(\cos(x)) = 0\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\forall x \in]0;\pi[, \quad \sin^2(x)y''(\cos(x)) - \cos(x)y'(\cos(x)) + y(\cos(x)) = 0\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\forall x \in]0;\pi[, \quad z''(x) + z(x) = 0\right) \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation différentielle $z'' + z = 0$ sur $]0;\pi[$ sont les fonctions :

$$x \longmapsto C_1\cos(x) + C_2\sin(x) \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Par suite, pour tout $t \in]-1;1[$, il vient que : $y(t) = C_1 t + C_2\sqrt{1-t^2}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}$ qui sont donc les fonctions solutions de $(\star)$ sur $]-1;1[$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1493

Soit n un entier naturel, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^n}$

On considère l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la fonction f_n est prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer que $\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^n} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^n}$.
3. Étudier la convergence de I_n. Pour quelle(s) valeur(s) de n l'intégrale I_n converge-t-elle ?
4. À l'aide du changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$, déterminer la valeur de I_n lorsque cette dernière converge.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 1493

1. On sait que $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} X^N\mathrm{e}^{-X} = 0$ pour tout entier naturel N. Donc on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 0$, et par suite, f_n est prolongeable par continuité en 0.

2. Il est immédiat que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^n}}{\dfrac{1}{x^n}} = 1$ puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 1$.

3. La fonction f_n est continue sur $]0;+\infty[$ et y est positive. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est donc impropre en ses deux bornes. L'étude de la convergence des deux intégrales $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ permettra de conclure quant à la convergence, et la valeur éventuelle, de cette dernière.
   - Puisque f_n est prolongeable par continuité en 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre en 0, et donc convergente.
   - Puisque $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^n}$ et que f_n est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, par le théorème d'équivalence des intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge, si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}t$ converge, c'est à dire si et seulement si $n \geq 2$.

   Par conséquent l'intégrale I_n est convergente si et seulement si $n \geq 2$.

4. La fonction $\varphi : t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $]0;+\infty[$ sur $]0;+\infty[$.
   D'après le théorème de changement de variables pour les intégrales impropres, pour $n \geq 2$, les deux intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^n}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n-2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature puisque le changement de variable $x = \varphi(t)$ donne les relations $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \quad \Leftrightarrow \quad t = \dfrac{1}{x} \\ \mathrm{d}x = -\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \end{cases}$
   La reconnaissance de $\Gamma(n-1)$, ou une récurrence simple (avec une intégration par parties), permet de montrer que $I_n = (n-2)!$ pour tout $n \geq 2$.