À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [5002] | 1| Mélange de lois | ESCP 2001 Filière ECS

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$ et Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit Z la variable aléatoire définie par : $\begin{cases} Z = 0 & \text{si} \quad X = 0 \\ Z = Y & \text{si} \quad X = 1 \end{cases}$

(1). Déterminer le support de Z.

(2). À l'aide du système complet d'événements $\{[X=0], [X=1]\}$, montrer que $\mathbb{P}([Z=0]) = 1 - p + pe^{-\lambda}$.

(3). Déterminer la loi de Z.

(4). Montrer que Z admet une espérance, et la calculer.

(5). Calculer ensuite $\mathbb{P}_{[Z=0]}([X=1])$.

Éléments de correction

(1). Il est clair que $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, donc par suite $Z(\Omega) = \mathbb{N}$.

(2). Les événements $[X=0]$ et $[X=1]$ formant un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne que :

$$\mathbb{P}([Z=0]) = \mathbb{P}([X=0] \cap [Z=0]) + \mathbb{P}([X=1] \cap [Z=0])$$

On a par ailleurs que : $[X=0] \Longrightarrow [Z=0]$ donc $[X=0] \cap [Z=0] = [X=0]$

Sur le même prinicpe : $[X=1] \Longrightarrow [Z=Y]$ et donc $[X=1] \cap [Z=0] = [X=1] \cap [Y=0]$

Il vient alors que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z=0]) &= \mathbb{P}([X=0]) + \mathbb{P}([Y=0] \cap [X=1]) \\ &\underset{\substack{X \text{ et } Y \\ \text{indép.}}}{=} \mathbb{P}([X=0]) + \mathbb{P}([Y=0]) \times \mathbb{P}([X=1]) \\ &= 1 - p + pe^{-\lambda} \end{aligned}$$

(3). Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Les événements $[X=0]$ et $[X=1]$ formant un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne que :

$$\mathbb{P}([Z=k]) = \mathbb{P}([X=0] \cap [Z=k]) + \mathbb{P}([X=1] \cap [Z=k])$$

Par ailleurs, on a : $[X=0] \cap [Z=k] = \varnothing$ avec $k \neq 0$

ainsi que : $[X=1] \Longrightarrow [Z=Y]$ et donc $[X=1] \cap [Z=k] = [X=1] \cap [Y=k]$

Il vient alors que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z=k]) &= \mathbb{P}([\varnothing]) + \mathbb{P}([Y=k] \cap [X=1]) \\ &\underset{\substack{X \text{ et } Y \\ \text{indép.}}}{=} 0 + \mathbb{P}([Y=k]) \times \mathbb{P}([X=1]) \\ &= pe^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \end{aligned}$$

(4). Z étant une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, par définition, Z admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum k \times \mathbb{P}([Z=k])$ est absolument convergente, et si c'est le cas, on aura $\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \times \mathbb{P}([Z=k])$.

On remarque par ailleurs que :

$$\mathbb{P}([Z=k]) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k = 0 \\ p \times \mathbb{P}([Y=k]) & \text{si} \quad k \geq 1 \end{cases}$$

Compte-tenu de l'expression de la loi de Z, et la convergence d'une série ne dépendant pas de ses premiers termes, l'existence de l'espérance de Z est équivalente à la convergence absolue de la série $\sum_{k\geq 1} k \times \mathbb{P}([Y=k])$, et en cas de convergence, on aura $\mathbb{E}(Z) = p \times \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \mathbb{P}([Y=k])$.

La convergence d'une série ne dépendant pas de ses premiers termes, les deux séries $\sum_{k\geq 1} k \times \mathbb{P}([Y=k])$ et $\sum_{k\geq 0} k \times \mathbb{P}([Y=k])$ sont de même nature, et puisque $0 \times \mathbb{P}([Y=0]) = 0$, en cas de convergence, elles auront même somme. Comme Y suit une loi de Poisson de paramètre λ, on sait que Y admet une espérance et donc que la série $\sum_{k\geq 0} k \times \mathbb{P}([Y=k])$ est bien absolument convergente.

Ainsi, Z ademet une espérance et puisque $\mathbb{E}(Y) = \lambda$, on en déduit que $\mathbb{E}(Z) = p \times \lambda$.

(5). Le système complet d'événements $\{[X=0], [X=1]\}$ permet décrire d'après la formule de Bayes et en reprenant les éléments précédents que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[Z=0]}([X=1]) &= \frac{\mathbb{P}([Z=0]\cap[X=1])}{\mathbb{P}([Z=0]\cap[X=0]) + \mathbb{P}([Z=0]\cap[X=1])} \\ &= \frac{p\mathrm{e}^{-\lambda}}{p\mathrm{e}^{-\lambda} + 1 - p} \end{aligned}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [5001] | 2| Tirage de jetons dans une urne | GE2 2015 Filière BCPST

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère N urnes numérotées de 1 à N telles que pour chaque $i \in [\![1;N]\!]$, l'urne numérotée i contient i jetons numérotés de 1 à i.

On considère l'épreuve aléatoire consistant en une suite de tirages selon les règles suivantes :

- le premier tirage est effectué dans l'urne numérotée N ;
- si le jeton obtenu au k^{e} tirage porte le numéro i, alors le $(k+1)^{\text{e}}$ tirage est effectué dans l'urne numérotée i ;,
- les différents jetons d'une même urne sont tirés de manière équiprobable.

On note pour chaque k entier naturel non nul, X_k la variable aléatoire donnant le numéro du jeton obtenu au k^{e} tirage.

(1). Quelle est la loi de X_1 ?

(2). Établir que, pour tout entier naturel non nul et $i \in [\![1;N]\!]$: $\mathbb{P}([X_{k+1}=i]) = \sum_{j=i}^{N} \frac{1}{j}\mathbb{P}([X_k=j])$.

(3). Montrer que pour tout k entier naturel non nul, la suite finie $(\mathbb{P}([X_k=i]))_{1\leq i\leq N}$ est décroissante.

(4).(a). Montrer que la suite $(\mathbb{P}([X_k=1]))_{k\in\mathbb{N}*}$ est croissante, puis justifier qu'elle est convergente.

(b). Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}([X_{k+1}=1]) \geq \mathbb{P}([X_k=1]) + \frac{1}{N}(1 - \mathbb{P}([X_k=1]))$.

(c). En déduire que $\mathbb{P}([X_k=1]) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

(5). On fixe un entier naturel i compris entre 2 et N.

Déduire de la question précédente que pour tout $i \in [\![2;N]\!]$, on a $\mathbb{P}([X_k=i]) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Éléments de correction

(1). Le premier tirage ayant lieu dans l'urne N, il est clair que X_1 désignant le numéro du jetons tiré, on a $X_1 = \{1, 2, \ldots, N\}$ et qu'il y a clairement équiprobabilité.

Par suite, il est clair que X_1 suit la loi uniforme sur $[\![1;N]\!]$.

(2). On désignera par U_j l'urne numéro j pour tout $j \in [\![1;N]\!]$.

Les tirages pouvant être réalisés dans toutes les urnes à chaque étape, on a clairement que X_k prend ses valeurs dans $[\![1;N]\!]$.

Soit alors $k \in \mathbb{N}$. Les événements $([X_k = j])_{j \in [\![1;N]\!]}$ formant un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\forall i \in [\![1;N]\!],\ \mathbb{P}([X_{k+1} = i]) = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}([X_k = j]) \times \mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = i])$$

La loi conditionnelle de X_{k+1} sachant $[X_k = i]$ est la loi uniforme sur $[\![1;j]\!]$, puisque la réalisation de l'événement $[X_k = j]$ induit un tirage dans l'urne U_j lors de la $(k+1)^{\text{e}}$ étape avec clairement équiprobabilité.

On en déduit donc que : $\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = i]) = \begin{cases} \dfrac{1}{j} & \text{si} \quad 1 \leq i \leq j \\ 0 & \text{si} \quad i > j \end{cases}$

ce qui assure que : $\forall i \in [\![1;N]\!],\ \mathbb{P}([X_{k+1} = i]) = \displaystyle\sum_{j=i}^{N} \frac{1}{j}\mathbb{P}([X_k = j])$.

(3). Étude de la suite $(\mathbb{P}([X_1 = i]))_{i \in [\![1;N]\!]}$: puisque X_1 suit la loi uniforme sur $[\![1;N]\!]$, cette suite est constante, et donc de fait décroissante au sens large.

Étude de la suite $(\mathbb{P}([X_1 = i]))_{i \in [\![1;N]\!]}$ avec $k \geq 2$: soit alros $i \in [\![1;N-1]\!]$. D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_k = i+1]) - \mathbb{P}([X_k = i]) &= \sum_{j=i+1}^{N} \frac{1}{j}\mathbb{P}([X_{k-1} = j]) - \sum_{j=i}^{N} \frac{1}{j}\mathbb{P}([X_{k-1} = j]) \\ &= -\frac{1}{i}\mathbb{P}([X_{k-1} = i]) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

ce qui assure la décroissance de cette suite.

(4).(a). Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_{k+1} = 1]) - \mathbb{P}([X_k = 1]) &= \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j}\mathbb{P}([X_k = j]) - \mathbb{P}([X_k = 1]) \\ &= \sum_{j=2}^{N} \frac{1}{j}\mathbb{P}([X_k = j]) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

ce qui assure le caractère croissant de la suite $(\mathbb{P}([X_k = 1]))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

Par ailleurs s'agissant d'une suite de probabilités, cette dernière est donc clairement une suite d'élements de $]0;1[$, ce qui assure son caractère majoré.

Ainsi, s'agissant d'une suite croissante majorée, par théorème, cette dernière est convergente.

(b). Le calcul précédent donne que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X_{k+1} = 1]) = \mathbb{P}([X_k = 1]) + \displaystyle\sum_{\ell=2}^{N} \frac{1}{\ell}\mathbb{P}([X_k = \ell])$

Or il est clair que : $\forall \ell \in [\![2;N]\!],\ \dfrac{1}{\ell}\mathbb{P}([X_k = \ell]) \geq \dfrac{1}{N}\mathbb{P}([X_k = \ell])$

Il vient donc que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X_{k+1} = 1]) \geq \mathbb{P}([X_k = 1]) + \displaystyle\sum_{\ell=2}^{N} \frac{1}{N}\mathbb{P}([X_k = \ell])$.

Or on sait que $([X_k = j])_{j \in [\![1;N]\!]}$ est un système complet d'événements, donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}([X_k = j]) = 1$.

Il vient alors que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X_{k+1} = 1]) \geq \mathbb{P}([X_k = 1]) + \dfrac{1}{N}(1 - \mathbb{P}([X_k = 1]))$

(c). La suite $(\mathbb{P}([X_k = 1]))_{k \in \mathbb{N}^*}$ étant convergente vers un réel ℓ d'après les questions précédentes, par passage à la limite dans l'inégalité précédente, il vient que : $\ell \geq \ell + \dfrac{1}{N}(1 - \ell)$ qui amène $\ell \geq 1$.

Or cette suite est bornée par 1, donc il vient que $\ell = 1$ et par suite que $\mathbb{P}([X_k = 1]) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

(5). Les événements $([X_k = j])_{j \in [\![1;N]\!]}$ formant un système complet d'événements, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}([X_k = j]) = 1$ ce qui amène à $\displaystyle\sum_{j=2}^{N} \mathbb{P}([X_k = j]) = 1 - \mathbb{P}([X_k = j])$.

De plus il est clair que : $\quad \forall i \in [\![2;N]\!],\ 0 \leq \mathbb{P}([X_k = i]) \leq \displaystyle\sum_{j=2}^{N} \mathbb{P}([X_k = j])$

ce qui assure que : $\quad 0 \leq \mathbb{P}([X_k = i]) \leq 1 - \mathbb{P}([X_k = 1])$

Par suite, par le théorème d'encadrement on en déduit que $\mathbb{P}([X_k = i]) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.