À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [4087] | 1| Base d'un espace de polynômes

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$, on considère la famille $\mathcal{B} = \big(x^3, x^2(x-2), x(x-2)^2, (x-2)^3\big)$.

(1). Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

(2). Déterminer les coordonnées du polynôme $P : x \longmapsto x^3 + 2x - 2$ dans la base $\mathcal{B}$.

Éléments de correction

(1). On note pour la suite $\mathcal{B}_0 = \big(1, x, x^2, x^3\big)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$.
Puisque $\mathcal{B} = \big(x^3, x^2(x-2), x(x-2)^2, (x-2)^3\big)$ en développant chaque polynôme, il vient que $\mathcal{B} = \big(x^3, -2x^2 + x^3, 4x - 4x^2 + x^3, -8 + 12x - 6x^2 + x^3\big)$.
$\mathcal{B}$ est une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}_3[x]$ qui est un espace de dimension finie égale à 4. D'après le théorème de caractérisation des bases par le rang, la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$ si, et seulement si, le rang de la famille $\mathcal{B}$ est égal à 4.
Or le rang de la famille $\mathcal{B}$ est égal au rang de l'une de ses représentations matricielles dans une base quelconque de $\mathbb{R}_3[x]$, en particulier $\mathcal{B}_0$.

Par définition de $\mathcal{B}$, on a : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Un échelonnement en colonne de cette dernière donne que :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_4 \\ L_2 \leftrightarrow L_3}}{\sim_C} \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 0 & 0 \\ -6 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice étant triangulaire inférieure avec tous ses termes diagonaux non nuls, elle est donc de rang 4.
Par suite la famille $\mathcal{B}$ est de rang 4, et ainsi, c'est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
$\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

(2). D'après les formules de changements de bases pour les vecteurs, on a : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_0}(P) = P_{\mathcal{B}_0\mathcal{B}} \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(P)$.

Or on a : $P_{\mathcal{B}_0\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_0}(P) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par suite, on en déduit que : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \left(P_{\mathcal{B}_0\mathcal{B}}\right)^{-1} \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_0}(P)$
Un échelonnement en ligne de la matrice augmentée $(P_{\mathcal{B}_0\mathcal{B}}|\mathrm{I}_4)$ donnera $\left(P_{\mathcal{B}_0\mathcal{B}}\right)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_4}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{2} L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{4} L_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{8} L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1 L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{4} L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2} L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{4} L_3 \\ L_4 \leftarrow -\frac{1}{8} L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi : $\quad (P_{\mathcal{B}_0\mathcal{B}})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Il vient alors : $\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ce qui donne $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{4} \\ -\dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$

On en déduit que les coordonnées de P dans $\mathcal{B}$ sont $\left(\dfrac{5}{4}, -\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$, c'est à dire que $P = \dfrac{5}{4}x^3 - \dfrac{1}{4}x^2(x-2) - \dfrac{1}{4}x(x-2)^2 + \dfrac{1}{4}(x-2)^3$

Exercice| [1368] | 2| Changement de base pour un endomorphisme

On désigne par $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et on considère $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tel que : $\qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Dans tout l'exercice on notera $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

(1). Exprimer A^2 en fonction de A et de I_3.
En déduire que la matrice A est inversible, et déterminer alors A^{-1}.

(2). Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(3). Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$ et $v_3 = (0, 1, -1)$, est une base de $\mathbb{R}^3$.

(4). Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.

Éléments de correction

(1). On a directement que :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \mathrm{I}_3 \\ &= 2A - \mathrm{I}_3 \end{aligned}$$

On en déduit donc que : $2A - A^2 = \mathrm{I}_3$ c'est à dir que : $A\left(2\mathrm{I}_3 - A\right) = \mathrm{I}_3$.

Il existe donc une matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \times B = \mathrm{I}_3$. Par théorème la matrice A est donc inversible, avec $A^{-1} = 2\mathrm{I}_3 - A$.

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2). f est d'après l'énoncé, un endomorphisme. Il suffit de montrer que f est bijectif pour que f soit un automorphisme. Or le théorème de caractérisation des endomorphismes bijectifs donne :

$$\left(f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right) \text{ est bijectif}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathrm{GL}_3\left(\mathbb{R}\right)\right)$$

On a ici : $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A \in \mathrm{GL}_3\left(\mathbb{R}\right)$.

Par suite, on en déduit que f est un endomorphisme bijectif, et ainsi que c'est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(3). La famille $\mathcal{C}$ étant un famille de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, le théorème de caractérisation des bases en dimension finie par leur représentation matricielle donne :

$$\left(\mathcal{C} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{C}\right) \in \mathrm{GL}_3\left(\mathbb{R}\right)\right)$$

Par définition : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{C}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Or : $\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{C}\right) \in \mathrm{GL}_3\left(\mathbb{R}\right)\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{C}\right)\right) = 3\right)$

Un échelonnement en ligne donne que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice étant échelonnée sous forme d'une matrice triangulaire supérieure avec tous ses termes diagonaux non nuls, elle est donc de rang 3, et par suite la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{C}\right)$ est inversible.

Par suite, on en déduit que la famille $\mathcal{C}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

(4). On sait que : $\left(f\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{y}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{x}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{y}\right)\right)$

Calcul de $f\left(v_1\right)$: puisque $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(v_1\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, il vient : $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, c'est à dire $f\left(v_1\right) = v_1$.

Calcul de $f\left(v_2\right)$: puisque $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(v_2\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, il vient : $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c'est à dire $f\left(v_2\right) = v_2$.

Calcul de $f(v_3)$: puisque $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, il vient :
$$A \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
, c'est à dire $f(v_3) = v_2 + v_3$.

On en déduit donc que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Avec plus d'autonomie...

Exercice| [4093] | 3| Étude d'un endomorphisme

On considère l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a-b & a-c \\ d & b \end{pmatrix} \end{array} \right.$. f est-il un automorphisme ?

Éléments de correction

Caractère linéaire de f : $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est bien un espace vectoriel.

Soient alors $(M, N) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ où l'on suppose que $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}}$ et $N = (n_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}}$.

On pose alors $R = \lambda M + N$ où $N = (r_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}}$ et montrons que $f(R) = \lambda f(M) + f(N)$.

Par définition, $R = (\lambda m_{ij} + n_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}}$. Par suite, il vient :

$$\begin{aligned}
f(R) &= \begin{pmatrix} r_{11} - r_{12} & r_{11} - r_{21} \\ r_{22} & r_{12} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda m_{11} + n_{11} - (\lambda m_{12} + n_{12}) & \lambda m_{11} + n_{11} - (\lambda m_{21} + n_{21}) \\ \lambda m_{22} + n_{22} & \lambda m_{12} + n_{12} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda m_{11} - \lambda m_{12} + n_{11} - n_{12} & \lambda m_{11} - \lambda m_{21} + n_{11} - n_{21} \\ \lambda m_{22} + n_{22} & \lambda m_{12} + n_{12} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda m_{11} - \lambda m_{12} & \lambda m_{11} - \lambda m_{21} \\ \lambda m_{22} & \lambda m_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_{11} - n_{12} & n_{11} - n_{21} \\ n_{22} & n_{12} \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} m_{11} - \lambda m_{12} & m_{11} - m_{21} \\ m_{22} & m_{12} \end{pmatrix} + f(N) \\
&= \lambda f(M) + f(N)
\end{aligned}$$

Ainsi f est bien une application linéaire et c'est donc un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Caractère bijectif de f : puisque $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie égale à 4, d'après le théorème de caractérisation des endomorphismes bijectifs en dimension finie, f est bijectif si, et seulement si, le rang de f est égal à 4.

Or le rang de f est égal au rang d'une de ses représentations matricielles donnée dans une base quelconque de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Si l'on note $\mathcal{B} = \left(E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} f(E_{11}) &= \begin{pmatrix} 1-0 & 1-0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= E_{11} + E_{12} \\ f(E_{12}) &= \begin{pmatrix} 0-1 & 0-0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -E_{11} + E_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(E_{21}) &= \begin{pmatrix} 0-0 & 0-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -E_{12} \\ f(E_{22}) &= \begin{pmatrix} 0-0 & 0-0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= E_{21} \end{aligned}$$

Il vient alors que : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Un échelonnement en ligne donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes diagonaux sont non nuls, ainsi son rang est égal à 4, et par suite $\operatorname{rg}(f) = 4$.
f étant un endomorphisme de rang 4 d'un espace de dimension 4, d'après le théorème de caractérisation des endomorphismes bijectifs en dimension finie, f est bijectif, donc c'est un automorphisme.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4075] | 4| Applications linéaires

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Pour tout réel a différent de 1, on considère l'endomorphisme f_a de l'espace vectoriel E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$M_a = \begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit de plus $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille de vecteurs de E définie par : $\begin{cases} e'_1 = a^2 e_1 + a e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_3 = 2e_1 + e_2 \end{cases}$

(1). Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la matrice M_a n'est pas inversible.

(2). En déduire les valeurs de a pour lesquelles f_a est un automorphisme.

(3). Prouver que $\mathcal{B}'$ est une base de E.

(4). Calculer $f_a(e'_1)$, $f_a(e'_2)$ et $f_a(e'_3)$.

(5). En déduire la matrice de f_a relativement à la base $\mathcal{B}'$.

Éléments de correction

(1). La matrice $M_a \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est inversible si, et seulement si, son rang est égal à 3. Un échelonnement en ligne donne ici :

$$\begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \text{puis } L_2 \leftrightarrow L_3}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a+2 & -(2a+1) & a \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - (a+2)L_1}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -(2a+1) & a \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + (}{\sim_L}$$

Cette dernière matrice est diagonale, et est de rang 3 si, et seulement, tous ses termes diagonaux ne sont pas nuls, autrement dit si $a \neq 0$.

La matrice M_a est de rang 3, donc inversible, si, et seulement si $a \neq 0$.

(2). D'après le théorème de caractérisation des endomorphismes bijectifs en dimension finie, l'endomorphisme f_a est bijectif si, et seulement si, f_a est de rang 3.

Or le rang de f_a est égal au rang de l'une de ses représentations matricielles dans une base quelconque de E, par exemple ici la matrice M_a.

f_a est un endomorphisme bijectif, c'est à dire un automorphisme, si, et seulement si, $a \neq 0$.

(3). La famille $\mathcal{B}'$ est une famille de 3 vecteurs. Or une famille de 3 vecteurs est libre si, et seulement si, elle est de rang 3.

Or le rang de la famille $\mathcal{B}'$ est égal au rang d'une de ses représentations matricielles dans une base quelconque de E.

On a ici : $\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} a^2 & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Un échelonnement en ligne donne :

$$\begin{pmatrix} a^2 & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - a^2 L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - (1+a)L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est diagonale, avec tous ses termes diagonaux non nuls puisque par hypothèse $a \neq 1$. Ainsi, elle est de rang 3.

Par suite, la famille $\mathcal{B}'$ est une famille de 3 vecteurs de rang 3, elle est donc libre.

Puisque E est supposé de dimension finie égale à 3, la famille $\mathcal{B}'$ étant une famille libre de 3 vecteurs d'un espace de dimension 3, par théorème elle en forme une base.

La famille $\mathcal{B}'$ est une base de E.

(4). Puisque $M_a = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_a)$, il vient que :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_a(e'_1)) & = & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_a) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1) \\
& = & \begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \\
& = & \begin{pmatrix} a^3 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} \\
\text{d'où } f_a(e'_1) & = & ae'_1 \\
\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_a(e'_2)) & = & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_a) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_2) \\
& = & \begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& = & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\text{d'où } f_a(e'_2) & = & e'_2 \\
\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_a(e'_3)) & = & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_a) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_3) \\
& = & \begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& = & \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\text{d'où } f_a(e'_3) & = & e'_2 + e'_3
\end{array}$$

(5). La question précédente donne donc directement que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.