Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 4610

Établir la convergence de la série de terme général $\dfrac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\ln(n)\ln(n+1)}$ et en calculer sa somme.

EX. 2 | Réf. 0619

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{\pi}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1-\cos(u_n) \end{cases}$

On admettra [a] que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0;1]$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq 1-\cos(x) \leq \dfrac{x^2}{2}$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{u_n}{2}$.
3. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{u_0}{2^n}$.
4. Qu'en déduire pour la série numérique de terme général u_n ?

a. un simple raisonnement par récurrence permet de l'établir

EX. 3 | Réf. 0619

Préparation à l'oral

EX. 4 | Réf. 4611

Dans cet exercice, on souhaite déterminer la nature de la série numérique de terme général $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.

1. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = \sqrt[n]{n}\left(\dfrac{\alpha}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$.
2. En déduire la nature de la série numérique de terme général u_n.

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 5 | Réf. 4612

On souhaite étudier la convergence de la série $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un réel r_n tel que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + r_n$.
3. Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie converge vers 0.
4. En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente et déterminer sa somme.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 6 | Réf. 4311

Dans cet exercice, on étudie par deux méthodes la nature de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, et pour tout entier $n \geq 1$, on introduit la somme partielle : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

1. *Question préliminaire :*
Etudier la monotonie de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$.
En déduire que cette suite admet une limite finie L ou bien diverge vers $+\infty$.

2. *Première méthode*

a. Établir l'inégalité suivante pour tout entier $n \geq 1$: $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$

b. En déduire que la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$.

3. *Deuxième méthode*

a. Vérifier l'inégalité suivante pour tout entier $k \geq 1$: $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}$

b. En déduire l'inégalité suivante pour tout entier $n \geq 1$: $H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n - \frac{1}{n}$
En déduire l'inégalité $\ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.

c. Établir la divergence de $(H_n)_{n\geq 1}$ vers $+\infty$ et montrer que $\frac{H_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

d. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\gamma_n = H_n - \ln(n)$.

i. Etudier le signe de l'expression $\gamma_n - \gamma_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 2$ et montrer que $0 \leq \gamma_n \leq 1$.

ii. En déduire la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ vers un réel γ appartenant à $[0, 1]$.

iii. Établir alors que : $H_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma$.