Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4310

On se propose d'établir la convergence et de calculer la somme de la série numérique $\sum \frac{n^2}{n!}$.

1. Justifier que la série numérique $\sum \frac{1}{n!}$ converge et en rappeler sa somme.
2. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \ \frac{n^2}{n!} = \frac{a}{(n-2)!} + \frac{b}{(n-1)!}$.
3. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum \frac{n^2}{n!}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4309

Soit $p \in \mathbb{N}$. Si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{R}_p[X]$.

Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on désignera par $P(M)$ la matrice $P(M) = \sum_{k=0}^{p} a_k M^k$ avec $M^0 = \mathrm{I}_3$.

On considère alors la matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de B.
2. B est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
3. On se propose dans cette question d'exprimer B^n où $n \in \mathbb{N}$ en fonction de n.
   - **a.** Soit $P(X) = (X-1)^2 (X+1) \in \mathbb{R}_3[X]$. Calculer $P(B)$.
   - **b.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $P(X)$.
     On note alors $Q(X)$ le quotient et $R(x) = a_n X^2 + b_n X + c_n \in \mathbb{R}_2[X]$ le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$.
     Monter alors que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ a_n + b_n + c_n = 1 \\ 2a_n + b_n = n \end{cases}$
   - **c.** En déduire les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   - **d.** Expliciter alors en fonction de n la matrice B^n pour tout entier naturel n.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 4311

Dans cet exercice, on étudie par deux méthodes la nature de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, et pour tout entier $n \geq 1$, on introduit la somme partielle : $\quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

1. *Question préliminaire :*
Etudier la monotonie de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$.
En déduire que cette suite admet une limite finie L ou bien diverge vers $+\infty$.

2. *Première méthode*

a. Établir l'inégalité suivante pour tout entier $n \geq 1$: $H_{2n} - H_n \geq \dfrac{1}{2}$

b. En déduire que la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$.

3. *Deuxième méthode*

a. Vérifier l'inégalité suivante pour tout entier $k \geq 1$: $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \dfrac{\mathrm{d}t}{t} \leq \dfrac{1}{k}$

b. En déduire l'inégalité suivante pour tout entier $n \geq 1$: $H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n - \dfrac{1}{n}$
En déduire l'inégalité $\ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.

c. Établir la divergence de $(H_n)_{n\geq 1}$ vers $+\infty$ et montrer que $\dfrac{H_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

d. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\gamma_n = H_n - \ln(n)$.

i. Etudier le signe de l'expression $\gamma_n - \gamma_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 2$ et montrer que $0 \leq \gamma_n \leq 1$.

ii. En déduire la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ vers un réel γ appartenant à $[0, 1]$.

iii. Établir alors que : $H_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma$.