Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

Exercice| [4995] | 1| Tirages dans une urne bicolore | G2E 2018 Filière BCPST

Soient m et n deux entiers naturels non nuls.
Une urne contient n boules rouges et m boules bleues. Les boules sont tirées une à une de l'urne, sans remise, au hasard, jusqu'à ce qu'une boule bleue soit tirée.
Soit T la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.

(1). Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable T.

(2). Calculer $\mathbb{P}([T=0])$ et $\mathbb{P}([T=1])$.

(3). Déterminer enfin la loi de T.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4996] | 2| Famille de matrices inversibles | G2E 2018 Filière BCPST

Dans tout ce qui suit, on considère J la matrice donnée par $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(1). Déterminer le rang de J, et sans calcul, donner une base du noyau de J et sa dimension.

(2). On considère alors l'ensemble $E_1(J) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ JX = X\}$.

- **(a).** Montrer que $E_1(J)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- **(b).** Montrer que $E_1(J)$ est de dimension 1.

(3). Montrer que la matrice $J + 2\mathrm{I}_3$ n'est pas inversible, puis donner une base du noyau de $J + 2\mathrm{I}_3$.

(4). Justifier que la famille $\mathscr{B} = (X_1, X_2, X_3)$ où $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forme une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(5). On considère la matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les matrices colonnes X_1, X_2 et X_3.
Déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}JP$.

(6). On se propose dans cette question de déterminer les valeurs de a telles que la matrice $M_a = \begin{pmatrix} a^3 & 2 & 1 \\ 0 & a^3-1 & 2 \\ 0 & 1 & a^3 \end{pmatrix}$ est inversible.

- **(a).** Exprimer M_a en fonction de J et de I_3.
- **(b).** Expliciter la matrice $D + a^3\mathrm{I}_3$, puis déterminer la(es) valeur(s) de a pour le(s)quelle(s) la matrice $D + a^3\mathrm{I}_3$ est inversible.
- **(c).** En déduire la(es) valeur(s) de a pour le(s)quelle(s) la matrice M_a est inversible.