Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2312

Soit (E) l'équation différentielle : $(E): \quad y'' - 3y' + 2y = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}}{2}$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2312

- Bien respecter le plan de résolution d'une EDL2.
- La méthode de superposition des solutions pour la recherche d'une solution particulière est à mettre en oeuvre dès lors que l'on aura transformé son second membre.
- C'est un problème de Cauchy à résoudre.

On pourra s'aider de la trame de rédaction suivante pour procéder à sa résolution :

- **Résolution de l'équation homogène :** soit (E_H) : $\boxed{}$ l'équation homogène associée en (E), et (E_C) : $\boxed{}$ l'équation caractéristique associée.
  Les solutions de (E_C) sont $\boxed{}$. On en conclut ainsi que les solutions sur $\boxed{}$ de (E_H) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto \boxed{}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$
- **Recherche d'une solution particulère de (E) à l'aide du principe de superposition des solutions :** on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}}{2} = \boxed{}$.
  On note alors $\begin{cases} (E_1) : & \boxed{} \\ (E_2) : & \boxed{} \end{cases}$ et on va ainsi chercher une solution particulière y_1 sur $\boxed{}$ de (E_1), et une solution particulière y_2 de (E_2) sur $\boxed{}$.

  $\hookrightarrow$ **Recherche d'une solution particulière de (E_1) :** le second membre de (E_1) étant de la forme $x \longmapsto C\mathrm{e}^{\omega x}$ avec $C = \boxed{}$ et $\omega = \boxed{}$, puisque ω $\boxed{}$ racine de l'équation caractéristique, on va chercher y_1 sous la forme $y_1(x) = \boxed{}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est à déterminer. On a :

  $$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad y_1(x) &= \boxed{} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad y_1'(x) &= \boxed{} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad y_1''(x) &= \boxed{} \end{aligned}$$

  Ainsi : y_1 est solution de (E_1) sur $\boxed{}$ $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{}$
  $\Leftrightarrow$ ...
  $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{} = \boxed{}$

  Ainsi, par identification, il vient $\alpha = \boxed{}$ et par suite : $\forall x \in \boxed{}$, $y_1(x) = \boxed{}$

  $\hookrightarrow$ **Recherche d'une solution particulière de (E_2) :** *on procède de même...*

  Finalement, d'après le principe de superposition des solutions, la fonction $y_0 : x \longmapsto \boxed{}$ est une solution particulière de (E) sur $\boxed{}$.
- **Solution de (E) sur $\boxed{}$:** les solutions de (E) sur $\boxed{}$ sont les fonctions de la forme : $x :\longmapsto \boxed{} + \boxed{}$
- **Problème de Cauchy :** on cherche la solution f de (E) sur $\boxed{}$ qui vérifie $\boxed{}$ et $\boxed{}$.
  Comme f est solution de (E) sur $\boxed{}$, f est de la forme : $\forall x \in \boxed{}$ où l'on doit déterminer C_1 et C_2 à l'aide de $f(0) = \boxed{}$ et $f'(0) = \boxed{}$. On a : $f(0) = \begin{cases} \boxed{} & \text{d'après l'expression de } f \\ \boxed{} & \text{car c'est ce que l'on veut} \end{cases}$. On en déduit que $\boxed{}$.
  Par ailleurs, pour tout $x \in \boxed{}$, $f'(x) = \boxed{}$.
  Ainsi : $f'(0) = \begin{cases} \boxed{} & \text{d'après l'expression de } f' \\ \boxed{} & \text{car c'est ce que l'on veut} \end{cases}$. On en déduit que $\boxed{}$.
  On résout alors le système $\left\{ \boxed{} \right.$ qui donne $C_1 = \boxed{}$ et $C_2 = \boxed{}$. Finalement : $\forall x \in \boxed{}$, $f(x) = \boxed{}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2087

Un embrayage vient appliquer, à l'instant $t = 0$, un couple résistant constant sur un moteur dont la vitesse à vide est de 150 rad/s.
On note $\omega(t)$, la vitesse de rotation du moteur à l'instant t.
La fonction ω est solution de l'équation différentielle : $(E) : \quad \dfrac{1}{200} y'(t) + y(t) = 146$
où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle positive t.

1. **a.** Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E).
b. Sachant que $\omega(0) = 150$, montrer que $\omega(t) = 146 + 4\mathrm{e}^{-200t}$ pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$.

2. **a.** On note $\omega_\infty = \lim\limits_{t \to +\infty} \omega(t)$. Déterminer la perte de vitesse $\omega(0) - \omega_\infty$ due au couple résistant.
b. On considère que la vitesse du moteur est stabilisée lorsque l'écart relatif $\left| \dfrac{\omega(t) - \omega_\infty}{\omega_\infty} \right|$ est inférieur à $1\ \%$.
Calculer le temps mis par le moteur pour stabiliser sa vitesse.
On donnera la valeur exacte et la valeur arrondie au millième.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2087

1. **a.** Mettre l'équation sous forme résolue, puis procéder à sa résolution en respectant scrupuleusement le plan d'étude du cours.
   b. Il s'agit d'utiliser les conditions initiales proposées pour identifier les constantes dans la solutions générale trouvée à la question précédente.
2. **a.** RAS
   b. Traduire sous forme d'une inéquation le fait que le moteur est stabilisé, puis la résoudre.