Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 1291

À l'aide du changement de variables $u = \mathrm{e}^{\,t}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\,t-\mathrm{e}^{\,t}}\,\mathrm{d}t$ converge et en donner la valeur.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1291

- On justifie le fait qu'il y a deux bornes impropres ;
- On procède au changement de variable proposé en vérifiant l'ensemble des hypothèses.
- On justifie la convergence de l'intégrale obtenue, et on conclut.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4240

L'objet de cet exercice consiste en l'étude de la convergence et du calcul de l'intégrale impropre $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.
2. Montrer que l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}\,\mathrm{d}x$ est convergente et calculer sa valeur.
3. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

   À l'aide d'une intégration par parties que $I = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$ et en déduire la valeur de I àl'aide du changement de variable $u = \sqrt{x}$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4240

1. Il y a deux bornes impropres à gérer, l'une avec le théorème d'équivalence, et l'autre avec le théorème d'encadrement.
2. Utiliser la forme canonique d'un polynôme de degré 2 puis deux changements de variables très simples pour retomber sur une $\arctan$
3. On fait une intégration par parties sur un intervalle de la forme $[a; b]$, mais il faut ensuite gérer les deux bornes impropres pour retomber sur l'intégrale proposée. Faire ensuite le changement de variable pour obtenir l'intégrale dont on admet la valeur.