## Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

---

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

## Travailler les fondamentaux

### EX. 1 | Réf. 4610

Établir la convergence de la série de terme général $\dfrac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\ln(n)\ln(n+1)}$ et en calculer sa somme.

### EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4610

- On commencera par expliciter la suite des sommes partielles de cette série en remarquant qu'elle n'est définie qu'à partir du rang $2$.
- On modifiera le terme général de la série de sorte à faire apparaître un téléscopage.

### EX. 2 | Réf. 0619

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{\pi}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1-\cos(u_n) \end{cases}$

On admettra[a] que : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n \in [0;1]$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\, 0 \leq 1-\cos(x) \leq \dfrac{x^2}{2}$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\, 0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{u_n}{2}$.
3. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\, 0 \leq u_n \leq \dfrac{u_0}{2^n}$.
4. Qu'en déduire pour la série numérique de terme général $u_n$ ?

a. un simple raisonnement par récurrence permet de l'établir

### EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0619

1. L'inégalité de gauche est triviale. Pour l'inégalité de droite, une étude de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2}{2} - (1-\cos(x))$ et d'une deuxième fonction à identifier donnera le résultat.
2. On exploite le résultat de la question précédente, en tenant compte du fait que $u_n \in [0;1]$.
3. L'initialisation est triviale, l'hérédité repose encore sur l'utilisation de la question 1.
4. Le théorème de comparaison des séries à termes positifs permet de conclure.

### EX. 3 | Réf. 0619

## Préparation à l'oral

### EX. 4 | Réf. 4611

Dans cet exercice, on souhaite déterminer la nature de la série numérique de terme général $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.

1. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = \sqrt[n]{n}\left(\dfrac{\alpha}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$.

2. En déduire la nature de la série numérique de terme général $u_n$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4611

## Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 5 | Réf. 4612

On souhaite étudier la convergence de la série $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un réel $r_n$ tel que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + r_n$.
3. Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie converge vers $0$.
4. En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente et déterminer sa somme.

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4612

1. Le calcul de l'intégrale proposé est direct et donnera le résultat.
2. On utilisera la linéarité de l'intégrale ainsi que la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique pour obtenir le terme en $\dfrac{1}{1+t^2}$ et la valeur de $r_n$.
3. En majorant l'intégrande définissant $r_n$ et en utilisant la croissance de l'intégrale, on obtiendra que $|r_n| \leq \dfrac{1}{2n+3}$ ce qui permettra de conclure.
4. La relation établie précédemment permet d'obtenir la limite de la suite des sommes partielles.

## Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 6 | Réf. 4311

Dans cet exercice, on étudie par deux méthodes la nature de la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$, et pour tout entier $n \geq 1$, on introduit la somme partielle : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

1. *Question préliminaire :*
   Etudier la monotonie de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$.
   En déduire que cette suite admet une limite finie $L$ ou bien diverge vers $+\infty$.
2. *Première méthode*
   - **a.** Établir l'inégalité suivante pour tout entier $n \geq 1$ : $H_{2n} - H_n \geq \dfrac{1}{2}$
   - **b.** En déduire que la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$.
3. *Deuxième méthode*
   - **a.** Vérifier l'inégalité suivante pour tout entier $k \geq 1$ : $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}$
   - **b.** En déduire l'inégalité suivante pour tout entier $n \geq 1$ : $H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n - \dfrac{1}{n}$
     En déduire l'inégalité $\ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
   - **c.** Établir la divergence de $(H_n)_{n\geq 1}$ vers $+\infty$ et montrer que $\dfrac{H_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

**d.** Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\gamma_n = H_n - \ln(n)$.

**i.** Etudier le signe de l'expression $\gamma_n - \gamma_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 2$ et montrer que $0 \leq \gamma_n \leq 1$.

**ii.** En déduire la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ vers un réel $\gamma$ appartenant à $[0, 1]$.

**iii.** Établir alors que : $\quad H_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma$.

EX. 5 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | `Réf. 4311`

**1.** On étudie le signe de la différence $H_{n+1} - H_n$.

**2. a.** Pour tout $k \in [\![n+1; 2n]\!]$, $\dfrac{1}{k} \geq \dfrac{1}{2n}$ et on a le résultat par sommation d'inégalités.

**b.** Raisonner par l'absurde en supposant que la suite converge vers un réel et exploiter l'inégalité précédente.

**3. a.** C'est la croissance de l'intégrale. . .

**b.** C'est une sommation d'inégalités.

**c.** Utiliser l'inégalité précédente pour utiliser ensuite le théorème d'encadrement des limites.

**d.** Penser à utiliser l'inégalité $\ln(1 + x) \leq x$.