Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4310

On se propose d'établir la convergence et de calculer la somme de la série numérique $\sum \frac{n^2}{n!}$.

1. Justifier que la série numérique $\sum \frac{1}{n!}$ converge et en rappeler sa somme.
2. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\,,\ \frac{n^2}{n!} = \frac{a}{(n-2)!} + \frac{b}{(n-1)!}$.
3. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum \frac{n^2}{n!}$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4310

1. Le critère de d'Alembert nous tend les bras ici. . .
2. Une réduction au même dénominateur et une identitifcation nous tendent les bras. . .
3. Au changement d'indice près, les deux séries précédentes sont celles de la première question. . .dont il faudra gérer les départs d'indices pour pouvoir utiliser la somme de la série de la première question.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4309

Soit $p \in \mathbb{N}$. Si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{R}_p[X]$.

Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on désignera par $P(M)$ la matrice $P(M) = \sum_{k=0}^{p} a_k M^k$ avec $M^0 = \mathrm{I}_3$.

On considère alors la matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de B.
2. B est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
3. On se propose dans cette question d'exprimer B^n où $n \in \mathbb{N}$ en fonction de n.
   a. Soit $P(X) = (X-1)^2 (X+1) \in \mathbb{R}_3[X]$. Calculer $P(B)$.
   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $P(X)$.
   On note alors $Q(X)$ le quotient et $R(x) = a_n X^2 + b_n X + c_n \in \mathbb{R}_2[X]$ le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$.
   Monter alors que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\{\begin{array}{l} a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ a_n + b_n + c_n = 1 \\ 2a_n + b_n = n \end{array}\right.$
   c. En déduire les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   d. Expliciter alors en fonction de n la matrice B^n pour tout entier naturel n.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4309

1. RAS
2. RAS
3. **a.** Il s'agit donc de calculer $(B - \mathrm{I}_3)^2 (B + \mathrm{I}_3)$.
   b. Écrire la formule liant diviseur, dividende, quotient et reste et l'évaluer en des bonnes valeurs.
   c. C'est un système linéaire à résoudre...
   d. Exploiter la division euclidienne de X^n par $P(X)$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 4311

Dans cet exercice, on étudie par deux méthodes la nature de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, et pour tout entier $n \geq 1$, on introduit la somme partielle : $\quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

1. *Question préliminaire :*
   Etudier la monotonie de la suite $(H_n)_{n \geq 1}$.
   En déduire que cette suite admet une limite finie L ou bien diverge vers $+\infty$.
2. *Première méthode*
   a. Établir l'inégalité suivante pour tout entier $n \geq 1$: $\quad H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$
   b. En déduire que la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ diverge vers $+\infty$.
3. *Deuxième méthode*
   a. Vérifier l'inégalité suivante pour tout entier $k \geq 1$: $\quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}$
   b. En déduire l'inégalité suivante pour tout entier $n \geq 1$: $\quad H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n - \frac{1}{n}$
   En déduire l'inégalité $\ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
   c. Établir la divergence de $(H_n)_{n \geq 1}$ vers $+\infty$ et montrer que $\frac{H_n}{\ln(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.
   d. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\gamma_n = H_n - \ln(n)$.
      i. Etudier le signe de l'expression $\gamma_n - \gamma_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 2$ et montrer que $0 \leq \gamma_n \leq 1$.
      ii. En déduire la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ vers un réel γ appartenant à $[0, 1]$.
      iii. Établir alors que : $\quad H_n - \ln(n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \gamma$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4311

1. On étudie le signe de la différence $H_{n+1} - H_n$.
2. **a.** Pour tout $k \in [\![n+1 ; 2n]\!]$, $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$ et on a le résultat par sommation d'inégalités.
   b. Raisonner par l'absurde en supposant que la suite converge vers un réel et exploiter l'inégalité précédente.
3. **a.** C'est la croissance de l'intégrale...
   b. C'est une sommation d'inégalités.
   c. Utiliser l'inégalité précédente pour utiliser ensuite le théorème d'encadrement des limites.
   d. Penser à utiliser l'inégalité $\ln(1 + x) \leq x$.