À noter & À garder en tête

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

Exercice| [4995] | 1| Tirages dans une urne bicolore | G2E 2018 Filière BCPST

Soient m et n deux entiers naturels non nuls.
Une urne contient n boules rouges et m boules bleues. Les boules sont tirées une à une de l'urne, sans remise, au hasard, jusqu'à ce qu'une boule bleue soit tirée.
Soit T la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.

(1). Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable T.

(2). Calculer $\mathbb{P}([T=0])$ et $\mathbb{P}([T=1])$.

(3). Déterminer enfin la loi de T.

Pistes de réflexion

(1). On commencera par étudier les cas extrêmes de tirages, tel « bleue tirée au premier/dernier tirage ».

(2). Pour décrire les événements $[T=0]$ et $[T=1]$, on pourra par exemple introduire les événements R_k : « Le tirage n° k a amené une boule rouge », et l'on pourra mobiliser la formule des probabilités composées, étant entendu que lors du tirage n° k, les tirages sont équiprobables.

(3). Sur le même principe, on décrira l'événement $[Y=k]$ à l'aide des évévements R_k, puis on mobilisera la formule des probabilités composées, et vu ce que l'on trouve, ce ne sera pas vraiment aisé et pertinent d'essayer de le simplifier...

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4996] | 2| Famille de matrices inversibles | G2E 2018 Filière BCPST

Dans tout ce qui suit, on considère J la matrice donnée par $J=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&-1&2\\0&1&0\end{pmatrix}$

(1). Déterminer le rang de J, et sans calcul, donner une base du noyau de J et sa dimension.

(2). On considère alors l'ensemble $E_1(J)=\{X\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ JX=X\}$.

(a). Montrer que $E_1(J)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(b). Montrer que $E_1(J)$ est de dimension 1.

(3). Montrer que la matrice $J+2\mathrm{I}_3$ n'est pas inversible, puis donner une base du noyau de $J+2\mathrm{I}_3$.

(4). Justifier que la famille $\mathcal{B}=(X_1,X_2,X_3)$ où $X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}$ et $X_3=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$ forme une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(5). On considère la matrice $P\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les matrices colonnes X_1, X_2 et X_3.
Déterminer la matrice D définie par $D=P^{-1}JP$.

(6). On se propose dans cette question de déterminer les valeurs de a telles que la matrice $M_a=\begin{pmatrix}a^3&2&1\\0&a^3-1&2\\0&1&a^3\end{pmatrix}$ est inversible.

(a). Exprimer M_a en fonction de J et de I_3.

(b). Expliciter la matrice $D + a^3\mathrm{I}_3$, puis déterminer la(es) valeur(s) de a pour le(s)quelle(s) la matrice $D + a^3\mathrm{I}_3$ est inversible.

(c). En déduire la(es) valeur(s) de a pour le(s)quelle(s) la matrice M_a est inversible.

Pistes de réflexion

(1). Un échelonnement de J donnera son rang, et le théorème du rang, la dimension du noyau. La première colonne de J étant nulle, on a donc directement un vecteur du noyau de J.

(2).(a). On vérifiera que $E_1(J)$ contient le vecteur nul, et est stable par combinaison linéaire.

(b). On cherchera une base de $E_1(J)$ en partant d'une matrice colonne $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ quelconque et en traduisant sous forme de condition(s) portant sur a, b et c l'appartenance de X à $E_1(J)$ par $JX = X$, ou on pourra voir $E_1(J)$ comme le noyau d'une matrice que l'on identifiera.

(3). On recherchera le rang de la matrice $J - 2\mathrm{I}_3$, ce qui donnera la non inversibilité, puis la dimension de son noyau, et en observant ses colonnes, on trouvera une base du noyau.

(4). Il suffit de faire le calcul, et si la matrice D ne porte pas bien son nom...on le recommence !

(5).(a). La relation est directe...

(b). $D + a^3\mathrm{I}_3$ a une forme particulière qui nous permet de déterminer immédiatement des conditions sur a pour s'assurer de son inversibilité.

(c). On pourra calculer $P^{-1}M_aP$ et interpréter le résultat en terme de matrices semblables puis de rang, ou alors montrer que $D + a^3\mathrm{I}_3 = P^{-1}M_aP$ en remarquant que $\mathrm{I}_3 = P^{-1}P$.