À noter & À garder en tête

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

Exercice| [2402] | 1| Applications linéaires

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+2y, -2x+y-3z, 4x+3y+z) \end{array} \right.$.

(1). Montrer que $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$.

(2). Déterminer une base du noyau de f.

(3). En déduire le rang de f.

(4). Déterminer l'image par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(5). Déduire des questions précédents une base de $\operatorname{Im}(f)$.

Pistes de réflexion

(1). C'est du classique !

(2). On traduit la définition d'appartenance au noyau pour un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$ sous forme d'un système de conditions portant sur les coordonnées de cet élément, pour en déduire une famille génératrice du noyau.

(3). On mobilisera le théorème du rang.

(4). C'est un simple calcul à mener.

(5). Une base de $\operatorname{Im}(f)$ s'obtient à partir de l'image d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4914] | 2| Rang d'une application linéaire

On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \operatorname{tr}(M)\mathrm{I}_2 + M \end{array} \right.$

où l'on rappelle que $\operatorname{tr}(M)$ désigne la trace de M.

(1). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). Montrer que si $M \in \operatorname{Ker}(f)$, alors $\operatorname{tr}(M) = 0$.

(3). Déduire de la question précédente que f est bijective.

(4). On se propose dans cette question de déterminer l'application réciproque f^{-1} de f.

- **(a).** Pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, déterminer $f(f(M))$.
- **(b).** En déduire que : $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f(f(M)) - 4f(M) + 3M = (0)$.
- **(c).** Donner alors l'expression de f^{-1}.

Pistes de réflexion

(1). On utilisera en particulier le fait que la trace est une application linéaire pour montrer que l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.

(2). On traduit le fait que M est dans le noyau de f, puis on applique la trace sur la relation obtenue.

(3). On reprend la question précédente en utilisant que si l'on est dans le noyau on vérifie une certaine relation et que l'on est nécessaire de trace nulle, ce qui en combinant les deux, assure que l'on est la matrice nulle. Ainsi le noyau est réduit au vecteur nul, ce qui donne l'injectivité et la bijectivité ensuite par un argument de dimension.

(4).(a). Il suffit d'effectuer la composition demandée.

(b). On exploite l'expression précédente.

(c). On pourra composer la relation précédente par f^{-1} et utiliser la linéarité de cette dernière que l'on justifiera.