## Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

## Un peu de technique

### EX. 1 | Réf. 2312

Soit $(E)$ l'équation différentielle : $(E)$ : $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}}{2}$.

**1.** Résoudre $(E)$ sur $\mathbb{R}$.

**2.** Déterminer la solution $f$ de $(E)$ qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.

### EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2312

**1.** L'équation différentielle $(E)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Le second membre de $(E)$ est clairement défini et continue sur $\mathbb{R}$. On peut donc tenter de résoudre $(E)$ sur $\mathbb{R}$.

- **Résolution de l'équation homogène :** soit $(E_H)$ : $y'' - 3y' + 2y = 0$ l'équation homogène associée en $(E)$, et $(E_C)$ : $r^2 - 3r + 2 = 0$ l'équation caractéristique associée.
  Les solutions de $(E_C)$ sont les deux réels $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. On en conclut ainsi que les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(E_H)$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{x}$ où $(c_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$
- **Recherche d'une solution particulère de $(E)$ :** on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{2} - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$.
  On va donc utiliser le principe de superposition des solutions pour déterminer une solution particulière de $(E)$.
  On note alors $\begin{cases} (E_1) : y'' - 3y' + 2y = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2} \\ (E_2) : y'' - 3y' + 2y = -\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{2} \end{cases}$ et on va ainsi chercher une solution particulière $y_1$ sur $\mathbb{R}$ de $(E_1)$, et une solution particulière $y_2$ de $(E_2)$ sur $\mathbb{R}$. D'après le principe de superposition des solutions, la fonction $y_0$ définie par $y_0 = y_1 + y_2$ est alors une solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$.

  ↪ **Recherche d'une solution particulière de $(E_1)$ :** le second membre de $(E_1)$ étant de la forme $x \longmapsto C\mathrm{e}^{\omega x}$ avec $C = \dfrac{1}{2}$ et $\omega = 2$, puisque $\omega$ est racine simple de l'équation caractéristique, on va chercher $y_1$ sous la forme $y_1(x) = \alpha x\mathrm{e}^{2x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est à déterminer. On a :

$$\begin{array}{rrcl} \forall x \in \mathbb{R}, & y_1(x) & = & \alpha x\mathrm{e}^{2x} \\ \forall x \in \mathbb{R}, & y_1'(x) & = & \alpha\mathrm{e}^{2x} + 2\alpha x\mathrm{e}^{2x} \\ \forall x \in \mathbb{R}, & y_1''(x) & = & 2\alpha\mathrm{e}^{2x} + 2\alpha\mathrm{e}^{2x} + 4\alpha x\mathrm{e}^{2x} \\ & & = & 4\alpha\mathrm{e}^{2x} + 4x\alpha\mathrm{e}^{2x} \end{array}$$

  Ainsi :

$$\begin{aligned} y_1 \text{ est solution de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad y_1''(x) - 3y_1(x) + 2y_1(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\, 4\alpha\mathrm{e}^{2x} + 4x\alpha\mathrm{e}^{2x} - 3\left(\alpha\mathrm{e}^{2x} + 2\alpha x\mathrm{e}^{2x}\right) + 2\alpha x\mathrm{e}^{2x} = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\, \alpha\mathrm{e}^{2x} = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} \end{aligned}$$

  Ainsi, par identification, il vient $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et par suite : $\forall x \in \mathbb{R},\, y_1(x) = \dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}$

  ↪ **Recherche d'une solution particulière de $(E_2)$ :** le second membre de $(E_2)$ étant de la forme $x \longmapsto C\mathrm{e}^{\omega x}$ avec $C = \dfrac{1}{2}$ et $\omega = -2$, puisque $\omega$ est n'est pas racine de l'équation caractéristique, on va chercher $y_2$ sous la forme $y_2(x) = \beta\mathrm{e}^{2x}$ où $\beta \in \mathbb{R}$ est à déterminer. On a :

$$\begin{array}{rrcl} \forall x \in \mathbb{R}, & y_2(x) & = & \alpha\mathrm{e}^{-2x} \\ \forall x \in \mathbb{R}, & y_2'(x) & = & -2\alpha\mathrm{e}^{-2x} \\ \forall x \in \mathbb{R}, & y_2''(x) & = & 4\alpha\mathrm{e}^{-2x} \end{array}$$

  Ainsi :

$$\begin{aligned} y_2 \text{ est solution de } (E_2) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad y_2''(x) - 3y_2(x) + 2y_2(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\, 4\alpha\mathrm{e}^{-2x} - 3\left(-2\alpha\mathrm{e}^{-2x}\right) + 2\alpha\mathrm{e}^{-2x} = -\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\, 12\alpha\mathrm{e}^{-2x} = -\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2} \end{aligned}$$

  Ainsi, par identification, il vient $\alpha = -\dfrac{1}{24}$ et par suite : $\forall x \in \mathbb{R},\, y_2(x) = -\dfrac{1}{24}\mathrm{e}^{-2x}$

Finalement, la fonction $y_0 : x \longmapsto -\frac{1}{24}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}$ est une solution particulière de $(E)$ sur $\mathbb{R}$.

- **Solution de** $(E)$ **sur** $\mathbb{R}$ **:** les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme : $x :\longmapsto C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{24}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}$

**2.** D'après le théorème de Cauchy-Linéaire, il existe une unique solution $f$ de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$.

Comme $f$ est solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$, $f$ est de la forme : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{24}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}$ où l'on déterminer $C_1$ et $C_2$ à l'aide de $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$. On a : $f(0) = \begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{1}{24} & \text{d'après l'expression de } f \\ 1 & \text{car c'est ce que l'on veut} \end{cases}$.

On en déduit que $C_1 + C_2 = \frac{25}{24}$.

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{12}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^{2x}$.

Ainsi : $f'(0) = \begin{cases} 2C_1 + C_2 + \frac{1}{12} + \frac{1}{2} & \text{d'après l'expression de } f' \\ -1 & \text{car c'est ce que l'on veut} \end{cases}$. On en déduit que $2C_1 + C_2 = -\frac{19}{12}$.

On résout alors le système $\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{25}{24} \\ 2C_1 + C_2 = -\frac{19}{12} \end{cases}$ qui donne $C_1 = -\frac{21}{8}$ et $C_2 = \frac{11}{3}$. Finalement : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = -\frac{21}{8}\mathrm{e}^{2x} + \frac{11}{3}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{24}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}$.

## Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

### EX. 2 | Réf. 2087

Un embrayage vient appliquer, à l'instant $t = 0$, un couple résistant constant sur un moteur dont la vitesse à vide est de $150$ rad/s.
On note $\omega(t)$, la vitesse de rotation du moteur à l'instant $t$.

La fonction $\omega$ est solution de l'équation différentielle : $(E) : \quad \frac{1}{200}y'(t) + y(t) = 146$

où $y$ désigne une fonction dérivable de la variable réelle positive $t$.

**1. a.** Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $(E)$.

**b.** Sachant que $\omega(0) = 150$, montrer que $\omega(t) = 146 + 4\mathrm{e}^{-200t}$ pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$.

**2. a.** On note $\omega_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} \omega(t)$. Déterminer la perte de vitesse $\omega(0) - \omega_\infty$ due au couple résistant.

**b.** On considère que la vitesse du moteur est stabilisée lorsque l'écart relatif $\left|\frac{\omega(t) - \omega_\infty}{\omega_\infty}\right|$ est inférieur à $1$ %.
Calculer le temps mis par le moteur pour stabiliser sa vitesse.
On donnera la valeur exacte et la valeur arrondie au millième.

### EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2087

**1. a.** On met l'équation $(E)$ sous forme résolue : $(E) \quad \Leftrightarrow \quad y' + 200y = 29200$.
On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constant mise sous forme résolue.
Les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $y$ définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y(t) = C\mathrm{e}^{-200t} + \frac{29200}{200} \text{ soit } y(t) = C\mathrm{e}^{-200t} + 146 \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

**b.** Puisque $\omega$ est solution de $(E)$ sur $[0;\infty[ \subset \mathbb{R}$, il existe une constante réelle $C$ telle que, pour tout $t \in [0;+\infty[$, $\omega(t) = C\mathrm{e}^{-200t} + 146$.
Or on sait que $\omega(0) = 150$, donc on en déduit que : $150 = C \times \mathrm{e}^{-200\times 0} + 146$, soit $C = 4$.
Finalement, pour tout $t \in [0;+\infty[,\quad \omega(t) = 4\mathrm{e}^{-200t} + 146$.

**2. a.** Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-200t} = 0$, on en déduit par opérations sur les limites que $\lim\limits_{t\to+\infty} \omega(t) = 146$, soit $\omega_\infty = 146$.
Par suite, la perte de vitesse $\omega(0) - \omega_\infty$ vaut $150 - 146 = 4$.

**b.** Il s'agit donc ici de déterminer le temps $t$ à partir duquel on a $\left|\dfrac{\omega(t)-\omega_\infty}{\omega_\infty}\right| \leq 0,01$, c'est à dire, résoudre l'équation $\left|\dfrac{\omega(t)-\omega_\infty}{\omega_\infty}\right| \leq 0,01$, que l'on peut encore écrire $\left|\dfrac{\omega(t)-146}{146}\right| \leq 0,01$.
Or, de part l'expression de $\omega(t)$, cette inéquation est équivalente à $\left|4\mathrm{e}^{-200t}\right| \leq 1,46$ ou encore $4\mathrm{e}^{-200t} \leq 1,46$ puisque $4\mathrm{e}^{200t} \geq 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\omega(t)-146}{146}\right| \leq 0,01 \quad &\Leftrightarrow \quad 4\mathrm{e}^{-200t} \leq 1,46 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-200t} \leq \frac{1,46}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad -200t \leq \ln\left(\frac{1,46}{4}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad t \geq -\frac{1}{200}\ln\left(\frac{1,46}{4}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, le moteur met $t = -\dfrac{1}{200}\ln\left(\dfrac{1,46}{4}\right)$ secondes pour stabiliser sa vitesse, soit $t \approx 5 \times 10^{-3}$ secondes approximativement (résultat à méditer...).