Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2133

Pour les deux systèmes suivants :

- Déterminer le rang du système ;
- Déterminer la matrice échelonnée réduite du système ;
- Le résoudre.

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} 2x - y - 2z = -2 \\ -x + 3y - 2z = 7 \\ 5x - 5y + 6z = -11 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} -2t + x - 2y + 3z = -12 \\ -t + x - y + z = -5 \\ 2t + 2x + 3y - z = 15 \\ -2t + 4x + y + z = -1 \end{cases}$$

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2133

- **Résolution du système $\mathcal{S}_1$:** on travaille à partir de la matrice augmentée pour obtenir son rang dans un premier temps, puis sa matrice échelonnée réduite, et finalement ses solutions.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 7 \\ 5 & -5 & 6 & -11 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & 12 \\ 0 & -5 & 22 & -12 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{16} L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 6L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{5} L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Le système est par ailleurs de rang 3, puisque présentant 3 pivots non nuls.

Les solutions sont ainsi : $\boxed{\left\{\left(\frac{1}{5}, \frac{12}{5}, 0\right)\right\}}$.

- **Résolution du système $\mathcal{S}_2$:** on adopte la même démarche.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 & -12 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 15 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & -7 & 6 & 39 \\ 0 & 9 & -11 & 6 & 47 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 9L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 7 & -3 & -16 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

Là encore, nous n'avons pas tout à fait la matrice échelonnée. Cependant, nous voyons que le nombre de pivot est

4, et donc le rang sera de 4. Il y aura ainsi une unique solution, puisqu'il s'agit d'un système à 4 équations et 4 inconnues.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow 2L_3 - L_4 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 14 & 0-14 & \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow 14L_2 + 4L_3 \\ L_1 \leftarrow 14L_1 - 3L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 14 & -28 & 0 & 0 & -42 \\ 0 & 28 & 0 & 0 & 56 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 14 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 28 & 0 & 0 & 56 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{14}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{28}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{14}L_3 \\ L_4 \leftarrow -\frac{1}{2}L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Finalement, la solution du système $\mathcal{S}_2$ est : $\boxed{(1, 2, -1, 3)}$

EX. 2 | Réf. 2096

On considère les quatre complexes z_1, z_2, z_3 et z_4 suivants :

$$z_1 = -3 + 3\mathrm{i}\,, \quad z_2 = 2\sqrt{3} + 6\mathrm{i}\,, \quad z_3 = 2 + 2\mathrm{i}\,\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad z_4 = 2 - 2\mathrm{i}\,\sqrt{3}$$

1. Pour chacun des complexes z_1, z_2, z_3 et z_4, déterminer le module et un argument.

2. Écrire alors la forme trigonométrique de ces quatre complexes.

3. On pose :

$$z_5 = z_1 \times z_2, \quad z_6 = \frac{z_4}{z_1}, \quad z_7 = \frac{z_2}{z_4} \qquad \text{et} \qquad z_8 = (z_3)^6$$

a. Pour chacun des complexes z_5, z_6, z_7 et z_8, déterminer le module et un argument.

b. Écrire alors la forme trigonométrique de ces quatre complexes.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2096

1. a. Voir tableau ci-après où θ désigne un argument du complexe z.

b. Voir dernière colonne du tableau ci-après.

z	$\lvert z\rvert$	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$	θ	$\rho\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}$
$-3+3\mathrm{i}$	$3\sqrt{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{22}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{4}}$
$2\sqrt{3}+6\mathrm{i}$	$4\sqrt{3}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$4\sqrt{3}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}$
$2+2\mathrm{i}\,\sqrt{3}$	4	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$4\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}$
$2-2\mathrm{i}\,\sqrt{3}$	4	$\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$-\dfrac{\pi}{3}$	$4\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}$

2. a. • **Pour z_5 :** on a $|z_5| = |z_1| \times |z_2|$, soit $|z_5| = 12\sqrt{6}$.

Par ailleurs, $\arg(z_5) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit qu'un argument de z_5 est $\dfrac{13\pi}{12}$.

- **Pour** z_6 **:** on a $|z_6| = \dfrac{|z_4|}{|z_1|}$, soit $|z_6| = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

  Par ailleurs, $\arg(z_6) = \arg(z_4) - \arg(z_1) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit qu'un argument de z_6 est $-\dfrac{13\pi}{12}$.
- **Pour** z_6 **:** on a $|z_6| = \dfrac{|z_2|}{|z_4|}$, soit $|z_7| = \sqrt{3}$.

  Par ailleurs, $\arg(z_7) = \arg(z_2) - \arg(z_4) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit qu'un argument de z_7 est $\dfrac{2\pi}{3}$.
- **Pour** z_8 **:** on a $|z_8| = |z_3|^6$, soit $|z_8| = 4096$.

  Par ailleurs, $\arg(z_8) = 6\arg(z_3) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit qu'un argument de z_8 est $-\dfrac{6\pi}{3} = -2\pi$.

3. On obtient alors : $z_5 = 12\sqrt{6}e^{i\frac{13\pi}{12}}$, $z_6 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}e^{-i\frac{13\pi}{12}}$, $z_7 = \sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_8 = 4096e^{i2\pi} = 4096$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2079

À l'aide de la formule du binôme, calculer :

$A = (1+i)^8$	$B = (1-i)^7$	$C = (2-3i)^5$	$D = (5+4i)^6$

On exprimera les résultats sous forme algébrique, c'est à dire sous la forme $a + ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Déduire des calculs précédents :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{7}(1+i)^k$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{6}(1-i)^k$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{4}(2-3i)^k$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{5}(5+4i)^k$

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2079

1. a.

$$\begin{aligned}
(1+i)^8 &= \sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}1^{8-k}i^k \\
&= \binom{8}{0}\times 1^8\times i^0 + \binom{8}{1}\times 1^7\times i^1 + \binom{8}{2}\times 1^6\times i^2 + \binom{8}{3}\times 1^5\times i^3 \\
&\quad + \binom{8}{4}\times 1^4\times i^4 + \binom{8}{5}\times 1^3\times i^5 + \binom{8}{6}\times 1^2\times i^6 + \binom{8}{7}\times 1^1\times i^7 \\
&\quad + \binom{8}{8}\times 1^0\times i^8 \\
&= 1 + 8i + 28i^2 + 56i^3 + 70i^4 + 56i^5 + 28i^6 + 8i^7 + i^8 \\
&= 1 + 8i - 28 - 56i + 70 + 56i - 28 - 8i + 1 \\
&= 16
\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}
(1-i)^7 &= \sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}1^{7-k}(-i)^k \\
&= \binom{7}{0}\times 1^7\times(-i)^0 + \binom{7}{1}\times 1^6\times(-i)^1 + \binom{7}{2}\times 1^5\times(-i)^2 \\
&\quad + \binom{7}{3}\times 1^4\times(-i)^3 + \binom{7}{4}\times 1^3\times(-i)^4 + \binom{7}{5}\times 1^2\times(-i)^5 \\
&\quad + \binom{7}{6}\times 1^1\times(-i)^6 + \binom{7}{7}\times 1^0\times(-i)^7 \\
&= 1 - 7i - 21 + 35i + 35 - 21i - 7 + i \\
&= 8 + 8i
\end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned}(2-3\mathrm{i})^5 &= \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}2^{5-k}\times(-3\mathrm{i})^5\\ &= \binom{5}{0}\times 2^5\times(-3\mathrm{i})^0+\binom{5}{1}\times 2^4\times(-3\mathrm{i})^1+\binom{5}{2}\times 2^3\times(-3\mathrm{i})^2\\ &\quad+\binom{5}{3}\times 2^2\times(-3\mathrm{i})^3+\binom{5}{4}\times 2^1\times(-3\mathrm{i})^4+\binom{5}{5}\times 2^0\times(-3\mathrm{i})^5\\ &= 32-5\times 16\times 3\mathrm{i}-10\times 8\times 9+10\times 4\times 27\mathrm{i}+5\times 2\times 81-243\mathrm{i}\\ &= 32-240\mathrm{i}-720+1080\mathrm{i}+810-243\mathrm{i}\\ &= 122+597\mathrm{i}\end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned}(5+4\mathrm{i})^6 &= \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}5^{6-k}(4\mathrm{i})^k\\ &= \binom{6}{0}\times 5^6\times(4\mathrm{i})^0+\binom{6}{1}\times 5^5\times(4\mathrm{i})^1+\binom{6}{2}\times 5^4\times(4\mathrm{i})^2\\ &\quad+\binom{6}{3}\times 5^3\times(4\mathrm{i})^3+\binom{6}{4}\times 5^2\times(4\mathrm{i})^4+\binom{6}{5}\times 5^1\times(4\mathrm{i})^5\\ &\quad+\binom{6}{6}\times 5^0\times(4\mathrm{i})^6\\ &= 15625+75000\mathrm{i}+150000\mathrm{i}^2+160000\mathrm{i}^3+96000\mathrm{i}^4\\ &\quad+30720\mathrm{i}^5+4096\mathrm{i}^6\\ &= 15625+75000\mathrm{i}-150000-160000\mathrm{i}+96000+30720\mathrm{i}-4096\\ &= -42471-54280\mathrm{i}\end{aligned}$$

2. a. $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{7}(1+\mathrm{i})^k &= \frac{1-(1+\mathrm{i})^8}{1-(1+\mathrm{i})}\\ &= \frac{1-16}{-\mathrm{i}}\\ &= \frac{15}{\mathrm{i}}\\ &= -15\mathrm{i}\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{6}(1-\mathrm{i})^k &= \frac{1-(1-\mathrm{i})^6}{1-(1-\mathrm{i})}\\ &= \frac{1-(8+8\mathrm{i})}{\mathrm{i}}\\ &= \frac{-7-8\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\\ &= -8+7\mathrm{i}\end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{4}(2-3\mathrm{i})^k &= \frac{1-(2-3\mathrm{i})^5}{1-(2-3\mathrm{i})}\\ &= \frac{1-(122+597\mathrm{i})}{-1+3\mathrm{i}}\\ &= \frac{-121-597\mathrm{i}}{-1+3\mathrm{i}}\\ &= -167+96\mathrm{i}\end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{5}(5+4\mathrm{i})^k &= \frac{1-(5+4\mathrm{i})^6}{1-(5+4\mathrm{i})}\\ &= \frac{1-(-42471-54280\mathrm{i})}{-4-4\mathrm{i}}\\ &= \frac{42472+54280\mathrm{i}}{-4-4\mathrm{i}}\\ &= -12094-1476\mathrm{i}\end{aligned}$$