Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 4610

Établir la convergence de la série de terme général $\dfrac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\ln(n)\ln(n+1)}$ et en calculer sa somme.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4610

Soit $(S_n)_{n\geq 2}$ la suite des sommes partielles de la série numérique de terme général $\dfrac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\ln(n)\ln(n+1)}$.

On a donc : $$\forall n\geq 2,\ S_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{\ln(k)\ln(k+1)} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\ln(k)}-\frac{1}{\ln(k+1)}\right) = \frac{1}{\ln(2)}-\frac{1}{\ln(n+1)}$$

Comme $\ln(n+1)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ par quotient $\dfrac{1}{\ln(n+1)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, et ainsi $S_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1}{\ln(2)}$.

Par suite, la suite des sommes partielles de la série numérique de terme général $\dfrac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\ln(n)\ln(n+1)}$ admettant une limite finie, cette série numérique est convergente, et a comme somme la valeur de cette limite, à savoir $\dfrac{1}{\ln(2)}$, ce qui permet d'écrire que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\ln(n)\ln(n+1)}=\frac{1}{\ln(2)}$.

EX. 2 | Réf. 0619

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0=\dfrac{\pi}{4}\\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=1-\cos(u_n)\end{cases}$

On admettra[a] que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in[0;1]$.

1. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R},\ 0\leq 1-\cos(x)\leq\dfrac{x^2}{2}$.
2. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq u_{n+1}\leq\dfrac{u_n}{2}$.
3. Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq u_n\leq\dfrac{u_0}{2^n}$.
4. Qu'en déduire pour la série numérique de terme général u_n ?

[a] un simple raisonnement par récurrence permet de l'établir

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 0619

1. On sait que : $\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(x)\in[-1;1]$, donc clairement $0\leq 1-\cos(x)$.
   Soit alors $f: x\longmapsto\dfrac{x^2}{2}-(1-\cos(x))$.
   La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec : $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=x-\sin(x)$.
   Soit alors $g: x\longmapsto x-\sin(x)$. La fonction g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec : $\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)=1-\cos(x)$.
   On a donc : $\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)\geq 0$.
   Les variations de la fonctions g sont alors les suivantes, et son signe s'en déduit sur $\mathbb{R}$ à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires puisque $g(0)=0$, ce qui donne alors le signe de $f'(x)$ et les variations de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$		$+$	
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de $g(x) = f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f présente donc un minimum sur $\mathbb{R}$ qui est 0, et par suite, on en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$, c'est à dire $1 - \cos(x) \leq \dfrac{x^2}{2}$.

Finalement, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq 1 - \cos(x) \leq \dfrac{x^2}{2}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors : $0 \leq 1 - \cos(u_n) \leq \dfrac{u_n^2}{2}$, c'est à dire $0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{u_n^2}{2}$.
Or par hypothèse, $u_n \in [0;1]$, donc on a $0 \leq u_n^2 \leq u_n$.
Ainsi, il vient : $0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{u_n}{2}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: ´ $0 \leq u_n \leq \dfrac{u_0}{2^n}$ ˇ
Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : par hypothèse, $u_0 \in [0;1]$, donc $u_0 \geq 0$.
Par ailleurs, $\dfrac{u_0}{2^0} = u_0$, et on a bien $u_0 \leq u_0$. Ainsi, on a : $0 \leq u_0 \leq \dfrac{u_0}{2^0}$, c'est à dire $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.
D'après la question précédente, $0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{u_n}{2}$.
Or par hypothèse de récurrence, $0 \leq u_n \leq \dfrac{u_0}{2^n}$.
Il vient donc : $0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u_0}{2^n}$
Ce qui donne : $0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{u_0}{2^{n+1}}$
et qui est bien $\mathcal{P}(n)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

4. La série numérique de terme général $\dfrac{u_0}{2^n} = u_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et la série numérique de terme général $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ sont de même nature. Or puisque $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$, la série numérique de terme général $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique convergente.

Par hypothèse, la série numérique de terme général u_n est à termes positifs avec : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{u_0}{2^n}$.

Puisque la série numérique de terme général $\dfrac{u_0}{2^n}$ est convergente, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique de terme général u_n est convergente.

EX. 3 | `Réf. 0619`

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 0619

Préparation à l'oral

EX. 4 | Réf. 4611

Dans cet exercice, on souhaite déterminer la nature de la série numérique de terme général $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.

1. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = \sqrt[n]{n}\left(\dfrac{\alpha}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$.

2. En déduire la nature de la série numérique de terme général u_n.

EX. 4 | Éléments de correction | Réf. 4611

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 5 | Réf. 4612

On souhaite étudier la convergence de la série $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un réel r_n tel que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + r_n$.

3. Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie converge vers 0.

4. En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente et déterminer sa somme.

EX. 5 | Éléments de correction | Réf. 4612

1. On a que :

$$\begin{aligned}
\forall \in \mathbb{N},\ \int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{2n+1}t^{2n+1}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2n+1}\times 1^{2n+1} - \frac{1}{2n+1}\times 0^{2n+1} \\
&= \frac{1}{2n+1}
\end{aligned}$$

et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k \int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t\right) \\
&\underset{\substack{\text{Linéarité} \\ \text{de l'intégrale}}}{=} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \left(-t^2\right)^n\right)\mathrm{d}t \\
&\underset{\substack{\text{Somme des termes} \\ \text{d'une suite géométrique}}}{=} \int_0^1 \left(\frac{1-\left(-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \underbrace{- \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}_{=r_n}
\end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a directement que :
$$\begin{aligned} |r_n| &= \left| -\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} \right| \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &\underset{1+t^2\geq 1}{\leq} \int_0^1 t^{2n+2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2n+3} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{1}{2n+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par encadrement $|r_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. Puisque $r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, et donc que la suite des sommes partielles associée à la série numérique de terme général u_n admet une limite finie qui est $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Ainsi, la série numérique de terme général u_n est convergente et a pour somme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, c'est à dire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Or un calcul direct donne que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$, d'où la somme de cette série.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 6 | Réf. 4311

Dans cet exercice, on étudie par deux méthodes la nature de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, et pour tout entier $n \geq 1$, on introduit la somme partielle : $\displaystyle H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

1. *Question préliminaire :*
Etudier la monotonie de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$.
En déduire que cette suite admet une limite finie L ou bien diverge vers $+\infty$.

2. *Première méthode*

a. Établir l'inégalité suivante pour tout entier $n \geq 1$: $H_{2n} - H_n \geq \dfrac{1}{2}$

b. En déduire que la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$.

3. *Deuxième méthode*

a. Vérifier l'inégalité suivante pour tout entier $k \geq 1$: $\displaystyle\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}$

b. En déduire l'inégalité suivante pour tout entier $n \geq 1$: $H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n - \dfrac{1}{n}$
En déduire l'inégalité $\ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.

c. Établir la divergence de $(H_n)_{n\geq 1}$ vers $+\infty$ et montrer que $\dfrac{H_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

d. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\gamma_n = H_n - \ln(n)$.

i. Etudier le signe de l'expression $\gamma_n - \gamma_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 2$ et montrer que $0 \leq \gamma_n \leq 1$.

ii. En déduire la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ vers un réel γ appartenant à $[0, 1]$.

iii. Établir alors que : $H_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma$.

EX. 6 | Éléments de correction | Réf. 4311

1. $H_{n+1} - H_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1}$ par télescopage ; or $\frac{1}{n+1} \geq 0$, donc $H_{n+1} - H_n > 0, \forall n \geq 1$, et ainsi

la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante

D'après le théorème de convergence des suites monotones, on en déduit que

$(H_n)_{n\geq 1}$ admet une limite finie L ou bien diverge vers $+\infty$

2. *Première méthode*

a. $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$; or $\forall k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$, donc $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ et ainsi

$$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$$

b. Supposons, par l'absurde que $(H_n)_{n\geq 1}$ converge vers L ; alors $\lim H_{2n} = L$ et $\lim H_n = L$, par addition des limites, il vient $\lim \big(H_{2n} - H_n\big) = 0$, ce qui contredit le résultat précédent. On en déduit que

$(H_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$

3. *Deuxième méthode*

a. $\forall t \in [k, k+1]$, on a $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$, donc, par croissance de l'intégrale, il vient :
$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}$, soit : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}$

b. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} &\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \qquad \text{par télescopage} \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \qquad \text{par changement de variable} \\
&\Leftrightarrow \quad H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n - \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité précédente, on a, d'une part, $H_n \leq \ln(n) + 1$ et, d'autre part, $H_n \geq \ln(n) + \frac{1}{n} \geq \ln(n)$; ce qui donne bien :

$$\ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$

c. Tout d'abord, $\lim \ln(n) = +\infty$, donc par comparaison, $\lim H_n = +\infty$
Ensuite, l'inégalité précédente peut s'écrire pour tout $n \geq 2$: $1 \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$; avec
$\lim \left(1 + \frac{1}{\ln(n)}\right) = 1$, donc, d'après le théorème d'encadrement, $\lim \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$ et ainsi $H_n \sim \ln(n)$

d. Soit $n \geq 2$, $\gamma_n - \gamma_{n-1} = H_n - \ln(n) - H_{n-1} + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$; en utilisant l'inégalité classique : $\ln(1+x) \leq x$, $\forall x \in]-1, +\infty[$, il vient $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n}$; soit $\frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq 0$

on a donc : $\forall n \geq 2$, $\gamma_n - \gamma_{n-1} \leq 0$

D'après l'inégalité $\ln(n) \leq H_n$, on en déduit que $\gamma_n \geq 0$; et, d'après $H_n - 1 \leq \ln(n)$, on déduit $\gamma_n \leq 1$;

ainsi : $\forall n \geq 2$, $0 \leq \gamma_n \leq 1$

La suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ et décroissante et minorée par 0, donc converge vers un réel γ appartenant à $[0, 1]$
Ainsi $\gamma_n - \gamma$ tend vers 0 et on peut écrire $\gamma_n - \gamma = o(1)$ soit $H_n - \ln(n) - \gamma = o(1)$ ou encore :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$