Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4310

On se propose d'établir la convergence et de calculer la somme de la série numérique $\sum \frac{n^2}{n!}$.

1. Justifier que la série numérique $\sum \frac{1}{n!}$ converge et en rappeler sa somme.
2. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\,,\ \frac{n^2}{n!} = \frac{a}{(n-2)!} + \frac{b}{(n-1)!}$.
3. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum \frac{n^2}{n!}$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4310

1. La série $\sum \frac{1}{n!}$ est une série à terme strictement positif.

   De plus, puisque $\left|\dfrac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$, on en déduit d'après le critère de d'Alembert que la série $\sum \frac{1}{n!}$ est convergente.
2. On remarque que pour $n \geq 2$, on a $n! = n \times (n-1) \times (n-2)!$.

   Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a :
   $$\begin{aligned} \frac{a}{(n-2)!} + \frac{b}{(n-1)!} &= \frac{an(n-1) + bn}{n!} \\ &= \frac{an^2 - (a-b)n}{n!} \end{aligned}$$

   Ainsi par identification des coefficients des polynômes en n des numérateurs des quotients $\frac{n^2}{n!}$ et $\frac{an^2 - (a-b)n}{n!}$ que :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\,,\ \frac{n^2}{n!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$
3. En utilisant le critère de d'Alembert aux deux séries à termes strictement positifs $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!}$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-2)!}$ on montrerait comme à la première question que ces deux séries sont convergentes.

   Par suite, par somme de deux séries convergentes, la série $\sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!}\right)$ est convergente, c'est à dire que $\sum_{n\geq 2} \frac{n^2}{n!}$ est convergente, ce qui assure la convergence de $\sum \frac{n^2}{n!}$.

   De plus, on a : $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!}$.

   Or, on a :
   $$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{1!} \\ &= \mathrm{e} - 1 \end{aligned}$$

Par ailleurs : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = \mathrm{e}$

Finalement, il vient que : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}=2\mathrm{e}-1$, et ainsi, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{n!} &= \frac{0^2}{0!}+\frac{1^2}{1!}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}\\ &= 0+1+2\mathrm{e}-1\\ &= 2\mathrm{e}\end{aligned}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4309

Soit $p\in\mathbb{N}$. Si $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{p}a_kX^k\in\mathbb{R}_p[X]$.

Pour toute matrice $M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on désignera par $P(M)$ la matrice $P(M)=\displaystyle\sum_{k=0}^{p}a_kM^k$ avec $M^0=\mathrm{I}_3$.

On considère alors la matrice $B\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $B=\begin{pmatrix}3&2&6\\2&1&4\\-2&0&-3\end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de B.
2. B est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
3. On se propose dans cette question d'exprimer B^n où $n\in\mathbb{N}$ en fonction de n.
   a. Soit $P(X)=(X-1)^2(X+1)\in\mathbb{R}_3[X]$. Calculer $P(B)$.
   b. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $P(X)$.
   On note alors $Q(X)$ le quotient et $R(x)=a_nX^2+b_nX+c_n\in\mathbb{R}_2[X]$ le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$.
   Monter alors que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad \begin{cases}a_n-b_n+c_n=(-1)^n\\ a_n+b_n+c_n=1\\ 2a_n+b_n=n\end{cases}$
   c. En déduire les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   d. Expliciter alors en fonction de n la matrice B^n pour tout entier naturel n.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 4309

1. **Recherche des valeurs propres de B :** On sait que : (λ est valeur propre de B) $\Leftrightarrow$ $(\det(\lambda\mathrm{I}_3-B)=0)$.

On a directement que :

$$\begin{aligned}\det(\lambda\mathrm{I}_3-B) &= \begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-6\\-2&\lambda-1&-4\\2&0&\lambda+3\end{vmatrix}\\ &\underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{=} \begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-6\\-2&\lambda-1&-4\\0&\lambda-1&\lambda-1\end{vmatrix}\\ &= (\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-6\\-2&\lambda-1&-4\\0&1&1\end{vmatrix}\\ &\underset{C_2\leftarrow C_2-C_3}{=} (\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-3&4&-6\\-2&\lambda+3&-4\\0&0&1\end{vmatrix}\\ &\underset{\text{Dév. p/r } L_3}{=} (\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda+3&4\\-2&\lambda+3\end{vmatrix}\\ &= (\lambda-1)\left(\lambda^2-1\right)\\ &= (\lambda-1)^2(\lambda+1)\end{aligned}$$

Par suite, on en déduit que $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(B)=\{-1,1\}$

Recherche des sous-espaces propres de B : On sait que pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a pour $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(B)$:

$$\begin{aligned} (X \in E_\lambda(B)) &\Leftrightarrow (BX = \lambda X) \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (x_1, x_2, x_3) \text{ est solution du} \\ \text{système de représentation} \\ \text{matricielle } (B - \lambda \mathrm{I}_3 | 0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Recherche de $E_{-1}(B)$: la résolution du système de représentation matricielle $(B + \mathrm{I}_3|0)$ donnera $E_{-1}(B)$:

$$(B+\mathrm{I}_3|0) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \text{puis } L_2 \leftarrow -L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit donc que : $\quad (X \in E_{-1}(B)) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}, x_3 \in \mathbb{R}$

Par suite, $E_{-1}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Recherche de $E_1(B)$: la résolution du système de représentation matricielle $(B + \mathrm{I}_3|0)$ donnera $E_{-1}(B)$:

$$(B-\mathrm{I}_3|0) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \text{puis } L_2 \leftarrow -L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit donc que : $\quad (X \in E_1(B)) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}, x_3 \in \mathbb{R}$

Par suite, $E_1(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Diagonalisation et trigonalisation de B : le polynôme caractéristique de B étant scindé sur $\mathbb{R}$, par théorème, B est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
Par contre, puisque $\dim(E_1(B)) < m_B(1)$, la matrice B ne sera pas diagonalisable.

2. a. On a que $B - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ puisque $(B - \mathrm{I}_3)^2 = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. Il vient alors que $(B - \mathrm{I}_3)^2 (B + \mathrm{I}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. On a donc que : $(\star)$: $\quad X^n = P(X) \times Q(X) + R(X)$.
Puisque 1 et-1 sont racines de P, il vient que $P(1) = 0$ et $P(-1) = 0$, ce qui donne les relations $R(1) = 1$ et $R(-1) = (-1)^n$.
En dérivant la relation $(\star)$, il vient que : $nX^{n-1} = P'(X) \times Q(X) + P(X) \times Q'(X) + R'(X)$.
Puisque 1 est racine double de P, 1 est encore racine de P', il vient donc en évaluant en 1 que : $n = R'(1)$.

Ainsi, on a : $\left\{\begin{array}{l} R(1)=1 \\ R(-1)=(-1)^n \\ R'(1)=n \end{array}\right.$ ce qui est bien $\left\{\begin{array}{l} a_n+b_n+c_n=1 \\ a_n-b_n+c_n=(-1)^n \\ 2a_n+b_n=n \end{array}\right.$.

c. On résout alors le système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & (-1)^n \\ 2 & 1 & 0 & n \end{array}\right)$ par échelonnement :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & (-1)^n \\ 2 & 1 & 0 & n \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & (-1)^n - 1 \\ 0 & -1 & -2 & n-2 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_3 \\ \text{puis } L_2 \leftarrow -L_2 \text{ et } L_3 \leftarrow -L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 - \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2-n \\ 0 & 0 & -4 & 2n-(-1)^n-3 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow 4L_1 + L4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 0 & 1+2n-(-1)^n \\ 0 & 2 & 0 & 1-(-1)^n \\ 0 & 0 & -4 & 2n-(-1)^n-3 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 2n+(-1)^n-1 \\ 0 & 2 & 0 & 1-(-1)^n \\ 0 & 0 & -4 & 2n-(-1)^n-3 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{2n+(-1)^n-1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{1-(-1)^n}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{3-2n+(-1)^n}{4} \end{array}\right)$$

Ainsi, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\{\begin{array}{l} a_n = \dfrac{2n+(-1)^n-1}{4} \\ b_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2} \\ c_n = \dfrac{3-2n+(-1)^n}{4} \end{array}\right.$

d. Puisque $X^n = P(X)\times Q(X) + R(X)$, il vient que $B^n = P(B)\times Q(B) + R(B)$ avec $P(B) = (0)$. Par suite, $B^n = a_n B^2 + b_n B + c_n \mathrm{I}_3$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 4311

Dans cet exercice, on étudie par deux méthodes la nature de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, et pour tout entier $n \geq 1$, on introduit la somme partielle : $\quad H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

1. *Question préliminaire :*
Etudier la monotonie de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$.
En déduire que cette suite admet une limite finie L ou bien diverge vers $+\infty$.

2. *Première méthode*

a. Établir l'inégalité suivante pour tout entier $n \geq 1$: $\quad H_{2n} - H_n \geq \dfrac{1}{2}$

b. En déduire que la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$.

3. *Deuxième méthode*

a. Vérifier l'inégalité suivante pour tout entier $k \geq 1$: $\quad \dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}$

b. En déduire l'inégalité suivante pour tout entier $n \geq 1$: $\quad H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n - \dfrac{1}{n}$
En déduire l'inégalité $\ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.

c. Établir la divergence de $(H_n)_{n\geq 1}$ vers $+\infty$ et montrer que $\dfrac{H_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

d. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\gamma_n = H_n - \ln(n)$.

i. Etudier le signe de l'expression $\gamma_n - \gamma_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 2$ et montrer que $0 \leq \gamma_n \leq 1$.

ii. En déduire la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ vers un réel γ appartenant à $[0, 1]$.

iii. Établir alors que : $\quad H_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 4311

1. $H_{n+1} - H_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1}$ par télescopage ; or $\frac{1}{n+1} \geq 0$, donc $H_{n+1} - H_n > 0, \forall n \geq 1$, et ainsi

la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante

D'après le théorème de convergence des suites monotones, on en déduit que

$(H_n)_{n\geq 1}$ admet une limite finie L ou bien diverge vers $+\infty$

2. *Première méthode*

a. $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$; or $\forall k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$, donc $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ et ainsi

$$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$$

b. Supposons, par l'absurde que $(H_n)_{n\geq 1}$ converge vers L ; alors $\lim H_{2n} = L$ et $\lim H_n = L$, par addition des limites, il vient $\lim \big(H_{2n} - H_n\big) = 0$, ce qui contredit le résultat précédent. On en déduit que

$(H_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$

3. *Deuxième méthode*

a. $\forall t \in [k, k+1]$, on a $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$, donc, par croissance de l'intégrale, il vient :

$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}$, soit : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}$

b. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \Longrightarrow & \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} && \text{par télescopage} \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} && \text{par changement de variable} \\
\Leftrightarrow \quad & H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n - \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité précédente, on a, d'une part, $H_n \leq \ln(n) + 1$ et, d'autre part, $H_n \geq \ln(n) + \frac{1}{n} \geq \ln(n)$; ce qui donne bien :

$$\ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$

c. Tout d'abord, $\lim \ln(n) = +\infty$, donc par comparaison, $\lim H_n = +\infty$

Ensuite, l'inégalité précédente peut s'écrire pour tout $n \geq 2$: $1 \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$; avec

$\lim \left(1 + \frac{1}{\ln(n)}\right) = 1$, donc, d'après le théorème d'encadrement, $\lim \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$ et ainsi $H_n \sim \ln(n)$

d. Soit $n \geq 2$, $\gamma_n - \gamma_{n-1} = H_n - \ln(n) - H_{n-1} + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$; en utilisant l'inégalité classique : $\ln(1+x) \leq x$, $\forall x \in]-1, +\infty[$, il vient $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n}$; soit $\frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq 0$

on a donc : $\forall n \geq 2$, $\gamma_n - \gamma_{n-1} \leq 0$

D'après l'inégalité $\ln(n) \leq H_n$, on en déduit que $\gamma_n \geq 0$; et, d'après $H_n - 1 \leq \ln(n)$, on déduit $\gamma_n \leq 1$;

ainsi : $\forall n \geq 2$, $0 \leq \gamma_n \leq 1$

La suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ et décroissante et minorée par 0, donc converge vers un réel γ appartenant à $[0, 1]$

Ainsi $\gamma_n - \gamma$ tend vers 0 et on peut écrire $\gamma_n - \gamma = o(1)$ soit $H_n - \ln(n) - \gamma = o(1)$ ou encore :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$