À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le résultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [2402] | 1| Applications linéaires

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+2y, -2x+y-3z, 4x+3y+z) \end{array} \right.$.

(1). Montrer que $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$.

(2). Déterminer une base du noyau de f.

(3). En déduire le rang de f.

(4). Déterminer l'image par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(5). Déduire des questions précédents une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Éléments de correction

(1). Caractère linéaire : par théorème :

$$\left(f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ est linéaire}\right) \Leftrightarrow \left(\left\{ \begin{array}{ccc} \forall u & \in & \mathbb{R}^3 \\ \forall v & \in & \mathbb{R}^3 \\ \forall \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right., f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)\right)$$

Soient alors $\left\{ \begin{array}{rcl} u = (x,y,z) & \in & \mathbb{R}^3 \\ v = (x',y',z') & \in & \mathbb{R}^3 \\ \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$, on pose $w = \lambda u + v$.

Montrons que $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$.

Par construction de $w = (x'', y'', z'')$, on a les relations suivantes : $\left\{ \begin{array}{rcl} x'' & = & \lambda x + x' \\ y'' & = & \lambda y + y' \\ z' & = & \lambda z + z' \end{array} \right.$ et par suite :

$$\begin{array}{rcl} f(w) & = & (2(\lambda x + x') + 2(\lambda y + y'), -2(\lambda x + x') + (\lambda y + y') - 3(\lambda z + z'), 4(\lambda x + x') + 3(\lambda y + y') + (\lambda z + z') \\ & = & (\lambda(2x+2y) + x' + y', \lambda(-2x+y-3z) - 2x' + y' - 3z', \lambda(4x+3y+z) + 4x' + 3y' + z') \\ & = & (\lambda(2x+2y), \lambda(-2x+y-3z), \lambda(4x+3y+z),) + (x'+y', -2x'+y'-3z', 4x'+3y'+z') \\ & = & \lambda(2x+2y, -2x+y-3z, 4x+3y+z) + (x'+y', -2x'+y'-3z', 4x'+3y'+z') \\ & = & \lambda f(u) + f(v) \end{array}$$

D'où la linéarité de f

Image de $\mathbb{R}^3$ par f : par construction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Par conséquent, f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

(2). Recherche d'une base du noyau de f : par définition : $\mathrm{Ker}\,(f) = \left\{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = \overrightarrow{0}\right\}$.

Ainsi, il vient :

$$\begin{array}{rcl} (u = (x,y,z) \in \mathrm{Ker}\,(f)) & \Leftrightarrow & \left(f(u) = \overrightarrow{0}\right) \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y \qquad = 0 \\ -2x + \ y - 3z \qquad = 0 \\ 4x + 3y \qquad + 1 = 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{c} (x,y,z) \text{ est solution du système de} \\ \text{représentation matricielle} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array}$$

Un échelonnement en ligne de ce dernier donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned} (u = (x, y, z) \in \mathrm{Ker}\,(f)) \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x & = -z \\ \quad y & = z \\ \qquad z & = z \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad (u \in \mathrm{Vect}\,((-1, 1, 1))) \end{aligned}$$

et donc $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\,((-1, 1, 1))$.
On en déduit donc que $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 1$.

(3). D'après le théorème du rang, on a :

$$\underbrace{\dim\left(\mathbb{R}^3\right)}_{=3} = \underbrace{\dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right)}_{=1} + \mathrm{rg}\,(f)$$

donc il vient que $\mathrm{rg}\,(f) = 2$, c'est à dire que $\mathrm{Im}\,(f)$ est de dimension 2.

(4). La base canonique de $\mathbb{R}^3$ étant formée des vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$, des calculs directs donnent que :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f((1, 0, 0)) \\ &= (2 \times 1 + 2 \times 0, -2 \times 1 + 0 - 3 \times 0, 4 \times 1 + 3 \times 0 + 0) \\ &= (2, -2, 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(e_2) &= f((0, 1, 0)) \\ &= (2 \times 0 + 2 \times 1, -2 \times 0 + 1 - 3 \times 0, 4 \times 0 + 3 \times 1 + 0) \\ &= (2, 1, 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(e_3) &= f((1, 0, 0)) \\ &= (2 \times 0 + 2 \times 0, -2 \times 0 + 0 - 3 \times 1, 4 \times 0 + 3 \times 0 + 1) \\ &= (0, -3, 1) \end{aligned}$$

(5). Puisque $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_3)$ par théorème, $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$.
Comme $\mathrm{Im}\,(f)$ est de dimension 2, il suffit d'extraire de la famille génératrice $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ de $\mathrm{Im}\,(f)$ deux vecteurs qui forment une famille libre.
Or $f(e_1)$ et $f(e_2)$ étant clairement non nuls et non colinéaires, ces deux vecteurs forment alors une famille libre de deux vecteurs dans un espace de dimension 2. Ils forment donc une base de cet espace. Ainsi, $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,((2, -2, 4), (2, 1, 3))$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4914] | 2| Rang d'une application linéaire

On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \mathrm{tr}\,(M)\mathrm{I}_2 + M \end{array} \right.$

où l'on rappelle que $\mathrm{tr}\,(M)$ désigne la trace de M.

(1). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). Montrer que si $M \in \mathrm{Ker}\,(f)$, alors $\mathrm{tr}\,(M) = 0$.

(3). Déduire de la question précédente que f est bijective.

(4). On se propose dans cette question de déterminer l'application réciproque f^{-1} de f.

(a). Pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, déterminer $f\,(f\,(M))$.

(b). En déduire que : $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f\,(f\,(M)) - 4f\,(M) + 3M = (0)$.

(c). Donner alors l'expression de f^{-1}.

Éléments de correction

(1). Caractère linéaire : par théorème :

$$(f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ est linéaire}) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\left\{ \begin{array}{ccc} \forall M_1 & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \forall M_2 & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \forall \lambda & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \end{array} \right. ,\ f\,(\lambda M_1 + M_2) = \lambda f\,(M_1) + f\,(M_1) \right)$$

Soient alors $\left\{ \begin{array}{ccc} M_1 & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M_2 & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \lambda & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \end{array} \right.$, et posons $M_3 = \lambda M_1 + M_2$.

Montrons que $f\,(M_3) = \lambda f\,(M_1) + f\,(M_2)$.

Par définition de f :

$$\begin{array}{rcl} f\,(M_3) & = & \mathrm{tr}\ (M_3)\,\mathrm{I}_2 + M_3 \\ & = & \mathrm{tr}\ (\lambda M_1 + M_2)\,\mathrm{I}_2 + \lambda M_1 + M_2 \\ & \underset{\substack{\text{La trace est} \\ \text{linéaire}}}{=} & (\lambda \mathrm{tr}\ (M_1) + \mathrm{tr}\ (M_2))\,\mathrm{I}_2 + \lambda M_1 + M_2 \\ & = & \lambda \mathrm{tr}\ (M_1)\,\mathrm{I}_2 + \mathrm{tr}\ (M_2)\,\mathrm{I}_2 + \lambda M_1 + M_2 \\ & = & \lambda\,\underbrace{(\mathrm{tr}\ (M_1)\,\mathrm{I}_2 + M_1)}_{=f(M_1)} + \underbrace{\mathrm{tr}\ (M_1)\,\mathrm{I}_2 + M_2}_{=f(M_2)} \\ & = & \lambda f\,(M_1) + (M_2) \end{array}$$

et donc f est bien linéaire.

Image de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par f : on a bien que $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Ainsi f étant une application linéaire de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, par définition, f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). Soit alors $M \in \mathrm{Ker}\,(f)$. Par définition, $f\,(M) = (0)$, ce qui donne ici $\mathrm{tr}\,(M)\mathrm{I}_2 + M = (0)$ et donc que $M = -\mathrm{tr}\,(M)\mathrm{I}_2$.

En appliquant la trace à cette égalité, il vient :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{tr}\,(M) & = & \mathrm{tr}\ (-\mathrm{tr}\,(M)\mathrm{I}_2) \\ & = & -\mathrm{tr}\,(M)\,\underbrace{\mathrm{tr}\ (\mathrm{I}_2)}_{=2} \\ & = & -2\mathrm{tr}\,(M) \end{array}$$

et par suite $\mathrm{tr}\,(M) = 0$.

(3). D'après la question précďente, si $M \in \mathrm{Ker}\,(f)$, alors $\mathrm{tr}\,(M) = 0$. Or on a aussi que $M = -\underbrace{\mathrm{tr}\,(M)}_{=0}\mathrm{I}_2$, ce qui amène à $M = (0)$.

Par suite, on en déduit que le seul élément du noyau de f est la matrice nulle.

En conclusion, $\mathrm{Ker}\,(f) = \{(0)\}$.

On en déduit donc par théorème que f est injective.

De plus, f étant un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie, par théorème, f est bijective.

(4).(a). Un calcul direct donne que :

$$\begin{array}{rcl} \forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f\,(f\,(M)) & = & \mathrm{tr}\ (f\,(M))\,\mathrm{I}_2 + f\,(M) \\ & = & \mathrm{tr}\ (\mathrm{tr}\,(M)\mathrm{I}_2 + M)\,\mathrm{I}_2 + \mathrm{tr}\,(M)\mathrm{I}_2 + M \\ & = & (\mathrm{tr}\,(M)\mathrm{tr}\ (\mathrm{I}_2) + \mathrm{tr}\,(M))\,\mathrm{I}_2 + \mathrm{tr}\,(M)\mathrm{I}_2 + M \\ & = & \mathrm{tr}\,(M)\mathrm{tr}\ (\mathrm{I}_2)\,\mathrm{I}_2 + \mathrm{tr}\,(M)\mathrm{I}_2 + \mathrm{tr}\,(M)\mathrm{I}_2 + M \\ & = & 2\mathrm{tr}\,(M)\mathrm{I}_2 + 2\mathrm{tr}\,(M)\mathrm{I}_2 + M \\ & = & 4\mathrm{tr}\,(M)\mathrm{I}_2 + M \end{array}$$

(b). On en déduit donc que :

$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f\left(f\left(M\right)\right) - 4f\left(M\right) + 3M = 4\mathrm{tr}\left(M\right)\mathrm{I}_2 + M - 4\left(\mathrm{tr}\left(M\right)\mathrm{I}_2 + M\right) + 3M$$
$$= 4\mathrm{tr}\left(M\right)\mathrm{I}_2 + M - 4\mathrm{tr}\left(M\right)\mathrm{I}_2 - 4M + 3M$$
$$= (0)$$

(c). f étant linéaire et bijective, par théorème, f^{-1} est aussi linéaire. Ainsi, il vient que :

$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f^{-1}\left(f\left(f\left(M\right)\right) - 4f\left(M\right) + 3M\right) = f^{-1}\left(f\left(f\left(M\right)\right)\right) - 4f^{-1}\left(f\left(M\right)\right) + 3f^{-1}\left(M\right)$$
$$= f\left(M\right) - 4M + 3f^{-1}\left(M\right)$$

Mais d'après ce qui précède : $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f^{-1}\left(f\left(f\left(M\right)\right) - 4f\left(M\right) + 3M\right) = f^{-1}\left((0)\right)$
et comme f^{-1} est linéaire, on a : $f^{-1}\left((0)\right) = (0)$.
Ainsi, il vient la relation : $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f\left(M\right) - 4M + 3f^{-1}\left(M\right) = (0)$
ce qui permet d'écrire que : $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f^{-1}(M) = \dfrac{1}{3}\left(4M - f(M)\right)$
et finalement que l'on a : $f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M - \dfrac{1}{3}\mathrm{tr}\left(M\right)\mathrm{I}_2 \end{array} \right.$.