Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4224

Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy $\mathcal{S}$ d'inconnues les fonctions $x : t \longmapsto x(t)$, $y : t \longmapsto y(t)$ et $z : t \longmapsto z(t)$ suivant :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x'(t) = -3x(t) + 3y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = -4x(t) + 4y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = -4x(t) + 3y(t) + 3z(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = -1 \end{cases}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1380

On considère un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel E de dimension 4, et on note $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_4}\right)$ une base de E.

On considère alors les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}$.

1. Donner une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ et $\mathrm{Ker}\,(f)$.

2. Soit $\overrightarrow{y}$ un vecteur non nul de $\mathrm{Im}\,(f)$.

- **a.** Montrer que $\overrightarrow{y}$ est un vecteur propre de f. Quelle est la valeur propre associée ?
- **b.** Déterminer les valeurs propres de f.
- **c.** L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Si oui, déterminer une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

3.
- **a.** Déterminer à l'aide des valeurs propres de A celles de B, ainsi que les sous-espaces propres correspondants.
- **b.** Montrer que la matrice B est diagonalisable et diagonaliser B avec une matrice de passage dont les éléments de la première ligne et ceux de la dernière colonne sont égaux à 1.