Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 1291

À l'aide du changement de variables $u = \mathrm{e}^{\,t}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\,t-\mathrm{e}^{\,t}}\,\mathrm{d}t$ converge et en donner la valeur.

EX. 2 | Réf. 4607

On se propose dans cet exercice d'établir la convergence et de déterminer la valeur de l'intégrale impropre $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{\,x}}}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que : $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{\,x}}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

2. En déduire la convergence de l'intégrale $\mathcal{I}$.

3. À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{1+\mathrm{e}^{\,x}}$ déterminer alors la valeur de $\mathcal{I}$.

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 4608

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Démontrer l'équivalence suivante : $\displaystyle\left(\int_0^a \frac{1}{(a-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ est convergente}\right) \quad\Leftrightarrow\quad (\,\alpha < 1\,)$

2. Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 4609

On se propose dans cet exercice d'étudier les variations de la fonction f définie par l'intégrale impropre suivante :

$$f : x \longmapsto \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que l'intégrale impropre $f(x)$ est convergente si, et seulement si, $x > 0$.

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que $x \leq y$.
Montrer que $f(x) \geq f(y)$. Qu'en déduire pour f ?

3. Démontrer que : $\quad\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x}$.

4. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 4309

Soit $p \in \mathbb{N}$. Si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{R}_p[X]$.

Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on désignera par $P(M)$ la matrice $P(M) = \sum_{k=0}^{p} a_k M^k$ avec $M^0 = \mathrm{I}_3$.

On considère alors la matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de B.

2. B est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?

3. On se propose dans cette question d'exprimer B^n où $n \in \mathbb{N}$ en fonction de n.

a. Soit $P(X) = (X-1)^2 (X+1) \in \mathbb{R}_3[X]$. Calculer $P(B)$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $P(X)$.
On note alors $Q(X)$ le quotient et $R(x) = a_n X^2 + b_n X + c_n \in \mathbb{R}_2[X]$ le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$.

Monter alors que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ a_n + b_n + c_n = 1 \\ 2a_n + b_n = n \end{cases}$

c. En déduire les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

d. Expliciter alors en fonction de n la matrice B^n pour tout entier naturel n.