Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

Exercice| [4896] | 1| Sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On désigne par F le sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ (A - \mathrm{I}_2)\, M = M\,(A - \mathrm{I}_2)\}$$

(1). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). Vérifier que I_2 appartiennent à F.

(3). Montrer alors que $F = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2, A)$.

(4). Déterminer alors une base de F.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4471] | 2| Séries numériques

(1). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^{3n}\,\mathrm{d}t$.
Exprimer I_n en fonction de n.

(2). Montrer alors que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(3). Étudier la convergence absolue de $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

(4). Exprimer $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-t)^{3n}$ pour tout $t \in [0;1]$ et $N \in \mathbb{N}^*$.

(5). Montrer alors que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$ est convergente et a pour somme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.