Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2305

Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 mise sous forme résolue suivante :

$$(E) : \quad y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x dérivable sur $]0;+\infty[$ et dont la dérivée y' est continue sur $]0;+\infty[$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2305

- Appliquer le plan de résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
- On cherchera une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante.

On pourra s'aider de la trame de rédaction suivante pour procéder à sa résolution :

- **Résolution sur $\boxed{\quad}$ de l'équation homogène (E_H) associée à (E) :** $\quad (E_H) : \boxed{\quad}$.

  La fonction $x \longmapsto \boxed{\quad}$ est une primitive sur $\boxed{\quad}$ de la fonction $x \longmapsto \boxed{\quad}$.

  Par conséquent, les solutions de (E_H) sur $\boxed{\quad}$ sont les fonctions y_H définies sur $\boxed{\quad}$ par :

$$\forall x \in \boxed{\quad}, \quad y_H(x) = \boxed{\quad} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

- **Recherche d'une solution particulière y_0 de (E) sur $\boxed{\quad}$:**

  On cherche y_0 à l'aide de la méthode de la variation de la constante. Ainsi, on cherche y_0 sous la forme :

$$\forall x \in \boxed{\quad}, \quad y_0(x) = \varphi(x) \times \boxed{\quad}$$

  où φ est une fonction, au moins dérivable et à dérivée continue, que l'on déterminera.

  Pour tout $x \in \boxed{\quad}, \quad y_0'(x) = \boxed{\quad}$.

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi :} \quad \left(y_0 \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \boxed{\quad}\right) &\Leftrightarrow \left(\forall x \in \boxed{\quad}, \quad \boxed{\quad}\right) \\
&\Leftrightarrow \ \dots \\
&\Leftrightarrow \left(\forall x \in \boxed{\quad}, \quad \varphi'(x) = \boxed{\quad}\right)
\end{aligned}$$

  On en déduit donc que : $\quad \forall x \in \boxed{\quad}, \quad \varphi(x) = \boxed{\quad}$.

  Finalement, la fonction y_0 est définie par $y_0 : \begin{array}{|lcl} \boxed{\quad} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \boxed{\quad} \end{array}$ est solution sur $\boxed{\quad}$ de (E).

- **Solution de (E) sur $\boxed{\quad}$:**

  Les solutions de (E) sur $\boxed{\quad}$ sont les fonctions y définies sur $\boxed{\quad}$ par :

$$\forall x \in \boxed{\quad}, \quad y(x) = \boxed{\quad} + \boxed{\quad} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1979

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\sin^2(x)\cos(x)$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(\pi - x)$. Que constate-t-on ? Que dire alors du point $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ pour $\mathcal{C}_f$?
2. Montrer que l'on peut réduire l'étude de f à l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
3. Établir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3\sin(x)g(x)$ où $g(x) = 3\cos^2(x) - 1$.
4. Étudier le signe de g sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, et montrer qu'il existe $x_0 \in \left]\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{3}\right[$ tel que $g(x_0) = 0$.

5. Dresser le tableau de variation de f.
6. Tracer la courbe représentative de f sur $[-\pi;\pi]$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1979

1. On fait le calcul, et on constate que l'on obtient $f(x)$. Faire alors un dessin et s'apercevoir qu'il y a un effet de symétrie (à justifier bien évidemment).
2. Étudier la parité et la périodicité de f et exploiter le résultat de la question précédente de sorte à réduire encore le domaine d'étude.
3. Calculer $f'(x)$ à l'aide des bonnes formules et factoriser l'expression comme demandé.
4. Penser à la fonction $\arccos\dots$
5. Déduire de ce qui précède le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle considéré, puis les variations de f.
6. On n'oubliera pas lors du tracé de $\mathcal{C}_f$ de construire les tangentes horizontales ou tout autre élément figurant dans le tableau de variations.