Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 1291

À l'aide du changement de variables $u = \mathrm{e}^{\,t}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\,t-\mathrm{e}^{\,t}}\,\mathrm{d}t$ converge et en donner la valeur.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1291

- On justifie le fait qu'il y a deux bornes impropres ;
- On procède au changement de variable proposé en vérifiant l'ensemble des hypothèses.
- On justifie la convergence de l'intégrale obtenue, et on conclut.

EX. 2 | Réf. 4607

On se propose dans cet exercice d'établir la convergence et de déterminer la valeur de l'intégrale impropre $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{\,x}}}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que : $\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{\,x}}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
2. En déduire la convergence de l'intégrale $\mathcal{I}$.
3. À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{1+\mathrm{e}^{\,x}}$ déterminer alors la valeur de $\mathcal{I}$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4607

1. On reviendra à la définition de la notion de négligeabilité et on remarquera que $1+\mathrm{e}^{\,x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\,x}$ (et que l'on justifiera…).
2. On pensera à traduire la relation de négligeabilité obtenue précédemment par une majoration en se rappelant qu'être négligeable entraîne d'être dominé, qui permettra de mobiliser le théorème de comparaison pour les intégrales impropres.
3. On effectuera le changement de variable proposé, sans s'intéresser ici au problème de convergence qui est acquis. On sera cependant amené à revenir à la définition d'une intégrale impropre pour calculer la valeur de la nouvelle intégrale, sauf à écrire des bétises…

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 4608

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Démontrer l'équivalence suivante : $\left(\displaystyle\int_0^a \frac{1}{(a-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ est convergente}\right) \quad\Leftrightarrow\quad (\alpha < 1)$
2. Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est divergente.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf . 4608

1. Un simple changement de variable donne la réponse pour se ramener à un intégrale de Riemann.
2. Un simple changement de variable donne la réponse pour se ramener à deux intégrales de Riemann.

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf . 4609

On se propose dans cet exercice d'étudier les variations de la fonction f définie par l'intégrale impropre suivante :

$$f : x \longmapsto \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que l'intégrale impropre $f(x)$ est convergente si, et seulement si, $x > 0$.
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que $x \leq y$.
   Montrer que $f(x) \geq f(y)$. Qu'en déduire pour f ?
3. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x}$.
4. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf . 4609

1. On pourra chercher un équivalent de la fonction $t \longmapsto \dfrac{t^{-x}}{t+1}$ en $+\infty$.
2. La croissance de l'intégrale en revenant à la définition d'une intégrale impropre donnera l'inégalité voulue.
3. On procèdera à un calcul explicite des $f(x) + f(x+1)$ en revenant à la définition d'une intégrale impropre.
4. La fonction f est positive et décroissante donc. . .et on passage alors à la limite dans la relation précédente.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf . 4309

Soit $p \in \mathbb{N}$. Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{R}_p[X]$.

Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on désignera par $P(M)$ la matrice $P(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k M^k$ avec $M^0 = \mathrm{I}_3$.

On considère alors la matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de B.
2. B est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
3. On se propose dans cette question d'exprimer B^n où $n \in \mathbb{N}$ en fonction de n.
   a. Soit $P(X) = (X-1)^2 (X+1) \in \mathbb{R}_3[X]$. Calculer $P(B)$.
   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $P(X)$.
   On note alors $Q(X)$ le quotient et $R(x) = a_n X^2 + b_n X + c_n \in \mathbb{R}_2[X]$ le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$.
   Monter alors que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ a_n + b_n + c_n = 1 \\ 2a_n + b_n = n \end{cases}$
   c. En déduire les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   d. Expliciter alors en fonction de n la matrice B^n pour tout entier naturel n.

EX. 5 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4309

1. RAS
2. RAS
3. a. Il s'agit donc de calculer $(B - \mathrm{I}_3)^2 (B + \mathrm{I}_3)$.
   b. Écrire la formule liant diviseur, dividende, quotient et reste et l'évaluer en des bonnes valeurs.
   c. C'est un système linéaire à résoudre...
   d. Exploiter la division euclidienne de X^n par $P(X)$.