Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4242

Résoudre sur $]-1;1[$ l'équation différentielle $(\star)$ d'inconnue la fonction $y : t \longmapsto y(t)$:

$$(\star) \quad \left(1-t^2\right) y'' - ty' + y = 0$$

en effectuant le changement de variable $t = \cos(x)$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4242

- On pose $z(x) = y\left(\cos(x)\right)$ et on calcule les dérivées successives.
- On reporte alors dans l'équation différentielle.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1493

Soit n un entier naturel, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^n}$

On considère l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la fonction f_n est prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer que $\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^n} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^n}$.
3. Étudier la convergence de I_n. Pour quelle(s) valeur(s) de n l'intégrale I_n converge-t-elle ?
4. À l'aide du changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$, déterminer la valeur de I_n lorsque cette dernière converge.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1493

1. C'est une conséquence du résultat sur les croissances comparées.
2. Même remarque.
3. Il y a deux bornes impropres à gérer. L'une en utilisant la première question, l'autre en utilisant le théorème d'encadrement.
   Les discussions sur la valeur de n sont alors immédiates.
4. Effectuer, en le justifiant, le changement de variable proposé et s'apercevoir que l'on retombe sur une intégrale déjà étudiée.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 1529

Pour tout entier naturel n, on désigne par I_n l'intégrale : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Montrer que, pour tout n : $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = (n+1)I_{n+1}I_n$.

a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
On pourra utiliser le résultat de la question (2).

b. Calculer u_0.

c. En déduire que, pour tout n : $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.

4. **a.** Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad \dfrac{n+1}{n+2} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$
On pourra utiliser le résultat de la question (2).

c. Montrer que $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et en déduire un équivalent de $n\,(I_n)^2$ en $+\infty$.

d. En déduire que la suite $(\sqrt{n}I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $\forall u \in [-n;+\infty[,\quad \left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{\,u}$.

6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \forall t \in [0;\sqrt{n}],\quad \left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-t^2} \leq \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^n}$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
Déduire de la question **(6)** un encadrement de J_n à l'aide de n, I_{2n+1} et I_{2n-2}.

8. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1529

1. RAS

2. Remarquer que $\cos^{n+2}(t) = \cos^{n+1}(t) \times \cos(t)$ et procéder à une intégration par parties.

3. **a.** Multplier les deux membres de l'égalité précédente par I_{n+1}.

b. RAS

c. Utiliser la valeur de u_0 pour conclure.

4. **a.** Justifier que la fonction à intégrer dans le calcul $I_{n+1} - I_n$ est positive.

b. S'assurer que I_n ne s'annule jamais et traduire la croissance d'une suite en terme de comparaison à 1.

c. RAS

d. RAS

5. Utiliser l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$.

6. Utiliser l'inégalité précédente.

7. Même remarque

8. Même remarque.