À noter & À garder en tête

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

Exercice| [4993] | 1| Tirages dans une urne | G2E 2018 Filière BCPST

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n avec $n \geq 3$.
On tire trois boules simultanément de cette urne, et on note X, Y et Z les variables aléatoires égales au numéro des boules obtenues avec $X < Y < Z$.

(1). Déterminer la loi de Y.

(2). Montrer que Y et $n+1-Y$ suivent la même loi.

(3). Calculer l'espérance de Y.

Pistes de réflexion

(1). On commencera par identifier le support de Y, c''est à dire l'ensemble des valeurs prises par Y, et pour déterminer sa loi, on pourra faire l'hypothèse d'équiprobabilité des tirages et voir un tirage comme une partie à 3 éléments d'un ensemble à n éléments.

(2). Sur le même principe, on s'assurera que les supports de Y et $n+1-Y$ sont identiques, et on déterminera $\mathbb{P}([n+1-Y=k])$ en revenant à un événement de la forme $[Y=k']$, l'idée étant de montrer que $\mathbb{P}([n+1-Y=k]) = \mathbb{P}([Y=k])$.

(3). On utilisera astucieusement la linéarité de l'intégrale.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4994] | 2| Fonction définie par une intégrale | G2E 2018 Filière BCPST

On considère les fonctions f, F et G définies par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-x^2} \end{array} \right., \quad F : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right., \quad G : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-(xt)^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

(1). À l'aide du changement de variable $u = xt$, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ G(x) = \dfrac{F(x)}{x}$

(2). Justifier que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, puis que la fonction G est paire et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Montrer alors que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ G'(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-x^2} - F(x)}{x^2}$$

(3).(a). Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(b). En déduire que : $\forall x \geq 0,\ xf(x) \leq F(x)$.

(c). Dresser alors le tableau des variations de G.
On ne demande pas de calculer la limite de G en $+\infty$.

Pistes de réflexion

(1). On procèdera au changement de variables proposé en déterminant notamment les nouvelles bornes d'intégrations.

(2). Le théorème fondamental de l'analyse permettra d'obtenir le caracère $\mathcal{C}^1$ de F ainsi que l'expression de $F'(x)$. La dérivabilité de G s'obtient par opérations sur les fonctions dérivables, et son expression par dérivée d'un quotient.

(3).(a). Il s'agit d'une étude de fonctions classique, dont on pourra remarquer qu'elle est paire pour simplifier l'étude.

(b). On fera intervenir la croissance de l'intégrale sur un intervalle de la forme $[0;x]$ avec $x \geq 0$.

(c). On obtient le signe de $G'(x)$ sur $\mathbb{R}_+$ grâce à la question précédente.