À noter & À garder en tête

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

Exercice| [4896] | 1| Sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On désigne par F le sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ (A - \mathrm{I}_2)\, M = M\,(A - \mathrm{I}_2)\}$$

(1). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). Vérifier que I_2 appartiennent à F.

(3). Montrer alors que $F = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2, A)$.

(4). Déterminer alors une base de F.

Pistes de réflexion

(1). Il s'agit de s'assurer en particulier de F est stable par combinaison linéaire.

(2). Il suffit de vérifier que I_2 satisfait la condition pour être un élément de F.

(3). On prendra une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ quelconque et on traduira sous forme d'un système la condition que doit vérifier cette dernière pour appartenir à F.

(4). La question précédente donne une famille génératrice de F. Il reste à s'assurer que cette dernière est libre pour avoir une base de F.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4471] | 2| Séries numériques

(1). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^{3n}\,\mathrm{d}t$.
Exprimer I_n en fonction de n.

(2). Montrer alors que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(3). Étudier la convergence absolue de $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

(4). Exprimer $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-t)^{3n}$ pour tout $t \in [0;1]$ et $N \in \mathbb{N}^*$.

(5). Montrer alors que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$ est convergente et a pour somme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.

Pistes de réflexion

(1). Il suffit de primitiver la fonction $t \longmapsto t^{3n}$.

(2). On utilisera la croissance de l'intégrale à partir d'un encadrement de la fonction $t \longmapsto \dfrac{t^{3N+3}}{1+t^3}$, qui permettra d'obtenir un encadrement de l'intégrale proposée.

(3). On revient à la définition de la convergence absolue, et on mobilise le théorème d'équivalence des séries à termes positifs.

(4). On mobilise la formule donnant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.

(5). Il s'agit de faire le le lien entre les intégrales et sommes calculées, et la série considérée. Pour cela, on pourra écrire autrement la somme de la question précédente, de sorte à faire apparaître la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^3}$ et intégrer ensuite l'égalité ainsi obtenu. Il restera à déterminer la limite de la suite des sommes partielles de la série pour conclure quant à la convergence.