

## Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le résultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

## Un peu de technique

## EX. 1 | Réf. 2305

Résoudre sur  $]0; +\infty[$  l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 mise sous forme résolue suivante :

$$(E) : y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$$

où  $y$  désigne une fonction de la variable réelle  $x$  dérivable sur  $]0; +\infty[$  et dont la dérivée  $y'$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .

## EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2305

(E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 mise sous forme résolue.

- **Résolution sur  $]0; +\infty[$  de l'équation homogène  $(E_H)$  associée à (E) :**  $(E_H) : y' + \frac{1}{x}y = 0.$

La fonction  $x \mapsto \ln(x)$  est une primitive sur  $]0; +\infty[$  de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$ .

Par conséquent, les solutions de  $(E_H)$  sur  $]0; +\infty[$  sont les fonctions  $y_H$  définies sur  $]0; +\infty[$  par :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \quad y_H(x) = Ce^{-\ln(x)} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

Or, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}$ , et par suite les solutions de  $(E_H)$  sur  $]0; +\infty[$  sont les fonctions  $y_H$  définies sur  $]0; +\infty[$  par :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \quad y_H(x) = \frac{C}{x} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

- **Recherche d'une solution particulière  $y_0$  de (E) sur  $]0; +\infty[$  :**

On cherche  $y_0$  à l'aide de la méthode de la variation de la constante. Ainsi, on cherche  $y_0$  sous la forme :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \quad y_0(x) = \varphi(x)e^{-\ln(x)} \quad \text{ou encore } y_0(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$$

où  $\varphi$  est une fonction, au moins dérivable et à dérivée continue, que l'on déterminera.

$$\text{Pour tout } x \in ]0; +\infty[, \quad y_0'(x) = \frac{\varphi'(x) \times x - \varphi(x) \times 1}{x^2} = \frac{\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2}.$$

$$\text{Ainsi, en reportant dans (E), on obtient : } \forall x \in ]0; +\infty[, \quad \frac{\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2} + \frac{1}{x} \times \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Ou encore : } \forall x \in ]0; +\infty[, \quad \frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2} + \frac{\varphi(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{On obtient ainsi comme condition sur } \varphi : \forall x \in ]0; +\infty[, \quad \frac{\varphi'(x)}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

Puisque  $x \neq 0$ , on en déduit que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{x}$ , et par suite,  $\varphi(x) = \ln(x)$ .

Finalement, la fonction  $y_0$  est définie par  $y_0 : \left. \begin{array}{l} ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(x)}{x} \end{array} \right\}$  est solution sur  $]0; +\infty[$  de (E).

- **Solution de (E) sur  $]0; +\infty[$  :**

Les solutions de (E) sur  $]0; +\infty[$  sont les fonctions  $y$  définies sur  $]0; +\infty[$  par :  $\forall x \in ]0; +\infty[, \quad y(x) = \frac{C}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$  où  $C \in \mathbb{R}$

## Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

## EX. 2 | Réf. 1979

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3 \sin^2(x) \cos(x)$ .

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , calculer  $f(\pi - x)$ . Que constate-t-on ? Que dire alors du point  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  pour  $\mathcal{C}_f$  ?
2. Montrer que l'on peut réduire l'étude de  $f$  à l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .
3. Établir que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 3 \sin(x)g(x)$  où  $g(x) = 3 \cos^2(x) - 1$ .
4. Étudier le signe de  $g$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , et montrer qu'il existe  $x_0 \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3} \right[$  tel que  $g(x_0) = 0$ .
5. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
6. Tracer la courbe représentative de  $f$  sur  $[-\pi; \pi]$ .

## EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 1979

$$\begin{aligned} 1. \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f(\pi - x) &= 3 \sin^2(\pi - x) \cos(\pi - x) \\ &= -3 \sin^2(x) \cos(x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

On en déduit que  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  est centre de symétrie de  $\mathcal{C}_f$ . En effet, les points  $M(x, f(x))$  et  $M'(\pi - x, f(\pi - x))$

$$\text{sont tels que, en notant } I \text{ leur milieu : } \begin{cases} x_I = \frac{x + \pi - x}{2} = \frac{\pi}{2} \\ y_I = \frac{f(x) + f(\pi - x)}{2} = 0 \end{cases}.$$

2.
  - Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x + 2\pi \in \mathbb{R}$  et  $f(x + 2\pi) = \dots = f(x)$  donc  $f$  est périodique de période  $2\pi$ . Il suffit donc d'étudier  $f$  sur un intervalle de longueur  $2\pi$ , pour en déduire ensuite  $\mathcal{C}_f$  sur  $\mathbb{R}$  par translation de vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} k2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
  - Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-x \in \mathbb{R}$ , et  $f(-x) = \dots = f(x)$ , donc  $f$  est paire. Il suffit alors d'étudier  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$  pour en déduire  $\mathcal{C}_f$  sur  $\mathbb{R}$  par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
  - On a vu par ailleurs que le point  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  est centre de symétrie pour  $\mathcal{C}_f$ .

Ainsi, on étudiera dans un premier temps  $f$  sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , puis on obtiendra par symétrie par rapport à  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  la courbe  $\mathcal{C}_f$  sur l'intervalle  $[0; \pi]$ , puis par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées  $\mathcal{C}_f$  sur  $[-\pi; \pi]$  qui est ainsi un intervalle de longueur  $2\pi$ .

$$\begin{aligned} 3. \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= 3 \times (2 \times \cos(x) \times \sin^{2-1}(x)) \times \cos(x) + 3 \sin^2(x) \times (-\sin(x)) \\ &= 6 \cos^2(x) \sin(x) - 3 \sin^3(x) \\ &= 3 \sin(x) (2 \cos^2(x) - \sin^2(x)) \\ &= 3 \sin(x) (2 \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x))) \\ &= 3 \sin(x) (3 \cos^2(x) - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \text{ On résout sur } \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ l'inéquation } g(x) \geq 0 : \quad g(x) \geq 0 &\Leftrightarrow \cos^2(x) \geq \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow \cos(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ puisque } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \cos(x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ puisque } \arccos \text{ est décroissante sur } [-1; 1] \end{aligned}$$

De même, on obtient que :  $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ . Donc en posant  $x_0 = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ , on a  $g(x_0) = 0$ . Puisque  $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$  et  $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$  avec  $\frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ , il vient que  $x_0 \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3} \right[$ . D'où le tableau de signe de  $g(x)$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

5. Puisque sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , la fonction sinus est positive ou nulle en 0, le signe de  $f'(x)$  pour  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  est exactement celui de  $g(x)$ . On en déduit ainsi les variations de  $f$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ . On a par ailleurs que  $f(x_0) =$

$$3 \sin^2 \left( \arccos \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right) \cos \left( \arccos \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right) = \sqrt{3} \sin^2 \left( \arccos \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right). \text{ Or : } \sin^2 \left( \arccos \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right) + \cos^2 \left( \arccos \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right) = 1, \text{ donc il vient } \sin^2 \left( \arccos \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right) = \frac{2}{3}, \text{ et par suite } f(x_0) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$x$	0	$x_0$	$\frac{\pi}{2}$	
Signe de $g(x)$		+	0	-
Signe de $f'(x)$	0	+	0	-
Variations de $f$				