Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2307

Résoudre à l'aide de sa représentation matricielle le système $\mathcal{S}$: $\begin{cases} 2x - \ \ y - 2z = -2 \\ -x + 3y - 2z = 7 \\ 5x - 5y + 6z = -11 \end{cases}$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2307

On travaille à partir de la matrice augmentée pour obtenir son rang dans un premier temps, puis sa matrice échelonnée réduite, et finalement ses solutions.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 7 \\ 5 & -5 & 6 & -11 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2\leftarrow 2L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3-2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & 12 \\ 0 & -5 & 22 & -12 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3+L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{16}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+6L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1+2L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1+L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Le système est par ailleurs de rang 3, puisque présentant 3 pivots non nuls. Les solutions sont ainsi : $\boxed{\left\{\left(\frac{1}{5}, \frac{12}{5}, 0\right)\right\}}$.

EX. 2 | Réf. 2078

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) linéaire d'ordre 2 à coefficients constants suivante :

$$(E) : \qquad y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-x} + \cos(2x)$$

puis déterminer la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $\begin{cases} f(0) = -1 \\ \text{et} \\ f'(0) = 2 \end{cases}$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2078

(E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constant, dont le second membre $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x} + \cos(2x)$ est défini et continue sur $\mathbb{R}$. On cherchera donc à résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

- **Résolution de l'équation homogène (E_H) associée à (E) :** $(E_H) : \quad y'' + 4y' + y = 0.$
  L'équation caractéristique associée à (E_H) est l'équation d'inconnue r : $(E_c) : \quad r^2 + 4r + 4 = 0.$
  Son discriminant est nul et le seule solution à cette dernière est donc $r = -2$.
  Par suite, les solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y_H définies sur $\mathbb{R}$ par : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_H(x) = (A + Bx)\,\mathrm{e}^{-2x} \text{ où } (A, B) \in \mathbb{R}^2}$
- **Recherche d'une solution particulière y_0 de (E) sur $\mathbb{R}$:** on procède en utilisant le principe de superposition des

solutions en posant :

$$\left\{\begin{array}{l}(E_1): \quad y''+4y'+4y = \mathrm{e}^{-x}\\ \quad\text{et}\\ (E_2): \quad y''+4y'+4y=\cos(2x)\end{array}\right. \qquad \text{et pour tout } x\in\mathbb{R},\quad y_0(x) = \underbrace{y_1(x)}_{\substack{\textbf{Solution de}\\ (E_1)\ \textbf{sur}\ \mathbb{R}}} + \underbrace{y_2(x)}_{\substack{\textbf{Solution de}\\ (E_2)\ \textbf{sur}\ \mathbb{R}}}$$

$\hookrightarrow$ **Recherche d'une solution particulière y_1 de (E_1) sur $\mathbb{R}$:** le second membre de l'équation (E_1) est de la forme $x \longmapsto K\mathrm{e}^{\omega x}$ avec $K=1$ et $\omega=-1$. Comme ω n'est pas racine de l'équation caractéristique associée à (E_1) (qui est la même que (E)), on cherchera y_1 sous la forme : $\forall x\in\mathbb{R},\quad y_1(x)=\alpha\mathrm{e}^{-x}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\quad y_1'(x)=-\alpha\mathrm{e}^{-x}$ et $y_1''(x)=\alpha\mathrm{e}^{-x}$.
En reportant dans (E_1), il vient : $\forall x\in\mathbb{R},\quad \alpha\mathrm{e}^{-x}+4\times(-\alpha\mathrm{e}^{-x})+4\times\alpha\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}$ ce qui donne $\alpha\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}$ et donc $\alpha=1$.
Par suite, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\boxed{y_1(x)=\mathrm{e}^{-x}}$.

$\hookrightarrow$ **Recherche d'une solution particulière y_2 de (E_2) sur $\mathbb{R}$:** le second membre de l'équation (E_1) est de la forme $x\longmapsto A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x)$ avec $A=1$, $B=0$ et $\omega=2$. Comme $\mathrm{i}\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique associée à (E_2) (qui est la même que (E)), on cherchera y_2 sous la forme : $\forall x\in\mathbb{R},\quad y_2(x)=\alpha\cos(2x)+\beta\sin(2x)$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.
On a ainsi : $\quad\forall x\in\mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{l} y_2'(x)=-2\alpha\sin(2x)+2\beta\cos(2x)\\ y_2''(x)=-4\alpha\cos(2x)-4\beta\sin(2x)\end{array}\right.$.
En reportant que (E_2), il vient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{-4\alpha\cos(2x)-4\beta\sin(2x)}_{y_2''(x)}+4\underbrace{(-2\alpha\sin(2x)+2\beta\cos(2x))}_{y_2'(x)}+4\underbrace{(\alpha\cos(2x)+\beta\sin(2x))}_{y_2(x)}=\cos(2x)$$

ce qui amène à : $\quad\forall x\in\mathbb{R},\quad (-8\alpha+8\beta)\cos(2x)-8\alpha\sin(2x)=\cos(2x)$.
Ainsi, par identification, il vient : $\left\{\begin{array}{l}-8\alpha+8\beta=1\\ -8\alpha=0\end{array}\right.$, ce qui donne $\alpha=0$ et $\beta=\dfrac{1}{8}$. Par conséquent, on a :
$\forall x\in\mathbb{R},\quad \boxed{y_2(x)=\dfrac{1}{8}\sin(2x)}$.

$\hookrightarrow$ Par le principe de superposition des solutions, on en déduit que la fonction y_0 donnée par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \boxed{y_0(x)=\underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{y_1(x)}+\underbrace{\frac{1}{8}\sin(2x)}_{y_2(x)}}$$

est une solution particulière de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.

- **Résolution de (E) sur $\mathbb{R}$:** les fonctions solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y(x)=\underbrace{(A+Bx)\,\mathrm{e}^{-2x}}_{y_H(x)}+\underbrace{\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{8}\sin(2x)}_{y_0(x)}\ \text{ où }\ (A,B)\in\mathbb{R}^2$$

- **Recherche de la fonction f :** on cherche donc la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $\left\{\begin{array}{c} f(0)=-1\\ \text{et}\\ f'(0)=2\end{array}\right.$. Puisque f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tels que : $\quad\forall x\in\mathbb{R},\quad y(x)=(A+Bx)\,\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{1}{8}\sin(2x)$.
Ainsi, la condition $f(0)=-1$ donne : $\quad f(0)=\left\{\begin{array}{l}-1\\ (A+B\times 0)\,\mathrm{e}^{-2\times 0}+\mathrm{e}^{-0}+\dfrac{1}{8}\sin(2\times 0)\end{array}\right.$.
On en déduit donc que : $A=-1$, puisque $\mathrm{e}^{0}=-2$ et $\sin(0)=0$.
Par suite, on a déjà : $\quad\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=(-2+Bx)\,\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{1}{8}\sin(2x)$.
Pour utiliser la deuxième condition $f'(0)=2$, on commence par calculer la dérivée de f :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=B\mathrm{e}^{-2x}-2\,(-1+Bx)\,\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{4}\cos(2x)$$

Ainsi, la condition $f'(0)=2$ donne : $\quad f'(0)=\left\{\begin{array}{l}2\\ B\mathrm{e}^{-2\times 0}-2\,(-2-B\times 0)\,\mathrm{e}^{-2\times 0}-\mathrm{e}^{-0}+\dfrac{1}{4}\cos(2\times 0)\end{array}\right.$.
On en déduit donc que : $2=B+2-1+\dfrac{1}{4}$ et donc finalement que : $\quad B=2-4+1-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{5}{4}$.
Par conséquent, on en déduit que : $\quad\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=y(x)=\left(-1-\dfrac{5}{4}x\right)\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{1}{8}\sin(2x)$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2076

On se propose dans cet exercice de calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right)$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Vérifier par le calcul que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad 1+\dfrac{2}{k(k+3)} = \dfrac{k^2+3k+2}{k(k+3)}$.
2. Factoriser le polynôme k^2+3k+2.
3. Exprimer sous forme d'une somme $\ln\left(1+\dfrac{2}{k(k+3)}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   On pourra utiliser la factorisation du polynôme k^2+3k+2.
4. Calculer alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right)$.
   On pourra faire apparaître un téléscopage de termes.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2076

1. On réduit au même dénominateur l'expression $1+\dfrac{2}{k(k+3)}$ pour se ramener à l'expression proposée. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{aligned} 1+\frac{2}{k(k+3)} &= \frac{k(k+3)+2}{k(k+3)} \\ &= \frac{k^2+3k+2}{k(k+3)} \end{aligned}$$
2. Le polynôme k^2+3k+2 en k a pour discriminant $\Delta = 3^2 - 4\times 1\times 2 = 1$ donc possède deux racines $k_1 = -1$ et $k_2 = -2$. Par suite, on en déduit que : $\quad k^2+3k+2 = (k+1)(k+2)$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{aligned} \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right) &= \ln\left(\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}\right) \\ &= \ln(k+1) + \ln(k+2) - \ln(k) - \ln(k+3) \end{aligned}$$
4. On en déduit ainsi que :
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) + \ln(k+2) - \ln(k) - \ln(k+3)\right) \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)}_{\substack{\text{Changement d'indice} \\ j=k+1}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \ln(k+2)}_{\substack{\text{Changement d'indice} \\ \ell=k+2}} - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \ln(k+3)}_{\substack{\text{Changement d'indice} \\ h=k+3}} \\ &= \sum_{j=2}^{n+1} \ln(j) + \sum_{\ell=3}^{n+2} \ln(\ell) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \sum_{h=4}^{n+3} \ln(h) \\ &\quad \text{et on redonne le même nom aux indices de sommation} \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \ln(k) + \sum_{k=3}^{n+2} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \sum_{k=4}^{n+3} \ln(k) \\ &\quad \text{la plage commune de sommation est l'intervalle d'entiers } [\![4;n]\!] \\ &= \left(\ln(2)+\ln(3)+\sum_{k=4}^{n}\ln(k)+\ln(n+1)\right) + \left(\ln(3)+\sum_{k=4}^{n}\ln(k)+\ln(n+1)+\ln(n+2)\right) \\ &\qquad - \left(\ln(1)+\ln(2)+\ln(3)+\sum_{k=4}^{n}\ln(k)\right) - \left(\sum_{k=4}^{n}\ln(k)+\ln(n+1)+\ln(n+2)+\ln(n+3)\right) \\ &= \ln(2)+\ln(3)+\ln(n+1)+\ln(3)+\ln(n+1)+\ln(n+2)-\ln(1)-\ln(2)-\ln 3)-\ln(n+2) \\ &= \ln(3)+\ln(n+1)-\ln(n+3) \end{aligned}$$