Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2305

Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 mise sous forme résolue suivante :

$$(E): \quad y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x dérivable sur $]0;+\infty[$ et dont la dérivée y' est continue sur $]0;+\infty[$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2305

(E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 mise sous forme résolue.

- **Résolution sur $]0;+\infty[$ de l'équation homogène (E_H) associée à (E) :** $\quad (E_H): \quad y' + \frac{1}{x}y = 0.$

  La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$.
  Par conséquent, les solutions de (E_H) sur $]0;+\infty[$ sont les fonctions y_H définies sur $]0;+\infty[$ par :

  $$\forall x \in]0;+\infty[, \quad y_H(x) = C\mathrm{e}^{-\ln(x)} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

  Or, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\mathrm{e}^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}$, et par suite les solutions de (E_H) sur $]0;+\infty[$ sont les fonctions y_H définies sur $]0;+\infty[$ par :

  $$\forall x \in]0;+\infty[, \quad y_H(x) = \frac{C}{x} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

- **Recherche d'une solution particulière y_0 de (E) sur $]0;+\infty[$:**
  On cherche y_0 à l'aide de la méthode de la variation de la constante. Ainsi, on cherche y_0 sous la forme :

  $$\forall x \in]0;+\infty[, \quad y_0(x) = \varphi(x)\mathrm{e}^{-\ln(x)} \text{ ou encore } y_0(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$$

  où φ est une fonction, au moins dérivable et à dérivée continue, que l'on déterminera.
  Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\quad y_0'(x) = \dfrac{\varphi'(x) \times x - \varphi(x) \times 1}{x^2} = \dfrac{\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2}$.
  Ainsi, en reportant dans (E), on obtient : $\quad \forall x \in]0;+\infty[, \quad \dfrac{\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2} + \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\varphi(x)}{x} = \dfrac{1}{x^2}$.
  Ou encore : $\quad \forall x \in]0;+\infty[, \quad \dfrac{\varphi'(x)}{x} - \dfrac{\varphi(x)}{x^2} + \dfrac{\varphi(x)}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$.
  On obtient ainsi comme condition sur φ : $\quad \forall x \in]0;+\infty[, \quad \dfrac{\varphi'(x)}{x} = \dfrac{1}{x^2}$.
  Puisque $x \neq 0$, on en déduit que : $\forall x \in]0;+\infty[, \quad \varphi'(x) = \dfrac{1}{x}$, et par suite, $\varphi(x) = \ln(x)$.
  Finalement, la fonction y_0 est définie par $\quad y_0 : \left| \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x)}{x} \end{array} \right.$ est solution sur $]0;+\infty[$ de (E).

- **Solution de (E) sur $]0;+\infty[$:**
  Les solutions de (E) sur $]0;+\infty[$ sont les fonctions y définies sur $]0;+\infty[$ par : $\forall x \in]0;+\infty[, \quad y(x) = \dfrac{C}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x} \quad$ où $C \in \mathbb{R}$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1979

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\sin^2(x)\cos(x)$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(\pi - x)$. Que constate-t-on ? Que dire alors du point $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ pour $\mathcal{C}_f$?
2. Montrer que l'on peut réduire l'étude de f à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Établir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3\sin(x)g(x)$ où $g(x) = 3\cos^2(x) - 1$.
4. Étudier le signe de g sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, et montrer qu'il existe $x_0 \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right[$ tel que $g(x_0) = 0$.
5. Dresser le tableau de variation de f.
6. Tracer la courbe représentative de f sur $[-\pi; \pi]$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 1979

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $$\begin{aligned} f(\pi - x) &= 3\sin^2(\pi - x)\cos(\pi - x) \\ &= -3\sin^2(x)\cos(x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

   On en déduit que $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. En effet, les points $M(x, f(x))$ et $M'(\pi - x, f(\pi - x))$ sont tels que, en notant I leur milieu : $\begin{cases} x_I = \dfrac{x + \pi - x}{2} = \dfrac{\pi}{2} \\ y_I = \dfrac{f(x) + f(\pi - x)}{2} = 0 \end{cases}$.

2.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$ et $f(x + 2\pi) = \ldots = f(x)$ donc f est périodique de période 2π. Il suffit donc d'étudier f sur un intervalle de longueur 2π, pour en déduire ensuite $\mathcal{C}_f$ sur $\mathbb{R}$ par translation de vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} k2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{Z}$.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$, et $f(-x) = \ldots = f(x)$, donc f est paire. Il suffit alors d'étudier f sur $\mathbb{R}_+$ pour en déduire $\mathcal{C}_f$ sur $\mathbb{R}$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
   - On a vu par ailleurs que le point $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ est centre de symétrie pour $\mathcal{C}_f$.

   Ainsi, on étudiera dans un premier temps f sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, puis on obtiendra par symétrie par rapport à $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ la courbe $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[0; \pi]$, puis par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées $\mathcal{C}_f$ sur $[-\pi; \pi]$ qui est ainsi un intervalle de longueur 2π.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \times \left(2 \times \cos(x) \times \sin^{2-1}(x)\right) \times \cos(x) + 3\sin^2(x) \times (-\sin(x)) \\ &= 6\cos^2(x)\sin(x) - 3\sin^2(x) \\ &= 3\sin(x)\left(2\cos^2(x) - \sin^2(x)\right) \\ &= 3\sin(x)\left(2\cos^2(x) - \left(1 - \cos^2(x)\right)\right) \\ &= 3\sin(x)\left(3\cos^2(x) - 1\right) \end{aligned}$$

4. On résout sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation $g(x) \geq 0$: $$\begin{aligned} g(x) \geq 0 &\Leftrightarrow \cos^2(x) \geq \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow \cos(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ puisque } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \cos(x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ puisque } \arccos \text{ est décroissante sur } [-1 \end{aligned}$$

   De même, on obtient que : $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Donc en posant $x_0 = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, on a $g(x_0) = 0$. Puisque $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ et $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ avec $\frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, il vient que $x_0 \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right[$. D'où le tableau de signe de $g(x)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

5. Puisque sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction sinus est positive ou nulle en 0, le signe de $f'(x)$ pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ est exactement celui de $g(x)$. On en déduit ainsi les variations de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On a par ailleurs que $f(x_0) =$

$3\sin^2\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)\cos\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = \sqrt{3}\sin^2\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$. Or : $\sin^2\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) + \cos^2\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = 1$, donc il vient $\sin^2\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = \frac{2}{3}$, et par suite $f\left(x_0\right) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

x	0		x_0		$\frac{\pi}{2}$
Signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	
Signe de $f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	0