Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 1291

À l'aide du changement de variables $u = \mathrm{e}^{t}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{t-\mathrm{e}^{t}}\,\mathrm{d}t$ converge et en donner la valeur.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 1291

- En posant $f : t \longmapsto \mathrm{e}^{t-\mathrm{e}^{t}}$, il vient que f est continue sur $]-\infty;+\infty[$.
  Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{t-\mathrm{e}^{t}}\,\mathrm{d}t$ est impropre en ses deux bornes infinies.
- La fonction $\varphi : u \longmapsto \ln(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $]0;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$.
  D'après le théorème de changement de variables pour les intégrales impropres, les deux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{t-\mathrm{e}^{t}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\ln(u)-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature.
- Or $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\ln(u)-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$ et cette intégrale converge et vaut 1 d'après le cours, d'où le résultat.

EX. 2 | Réf. 4607

On se propose dans cet exercice d'établir la convergence et de déterminer la valeur de l'intégrale impropre $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{x}}}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que : $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{x}}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
2. En déduire la convergence de l'intégrale $\mathcal{I}$.
3. À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{1+\mathrm{e}^{x}}$ déterminer alors la valeur de $\mathcal{I}$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 4607

1. On a clairement que : $\displaystyle\frac{1+\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}} = 1 + \underbrace{\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $1+\mathrm{e}^{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{x}$.

   Par suite, par passage à la puissance dans les équivalents, $\sqrt{1+\mathrm{e}^{x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.

   On en déduit donc que : $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{x}}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ et par conséquent que $\displaystyle\frac{\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{x}}}}{\frac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\frac{1}{x^2}}$

   Or on a : $\displaystyle\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\frac{1}{x^2}} = x^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée, ce qui assure que $\displaystyle\frac{\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{x}}}}{\frac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc que $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{x}}} \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
2. La fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{x}}}$ est continue sur $[0;+\infty[$, donc l'intégrale $\mathcal{I}$ est impropre seulement en sa borne $+\infty$.
   Il est immédiat que : $\forall x \in [0;+\infty[\,,\ 0 \leq f(x)$.

Puisque $\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{x}}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, on en déduit que $\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{x}}} \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Ainsi, il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x\in[0;+\infty[\ \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{x}}} \leq \dfrac{M}{x^2}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann convergente, donc d'après le théorème de comparaison des intégrales impropres de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{x}}}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Comme les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{x}}}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{x}}}\,\mathrm{d}x$ sont de même nature, on en déduit alors que l'intégrale $\mathcal{I}$ est convergente.

3. Le changement de variable $u=\sqrt{1+\mathrm{e}^{x}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant sur $[0;+\infty[$ à valeurs dans $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$. Ainsi, d'après le théorème de changement de variables, les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{x}}}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{1}{u}\times\frac{2u}{u^2-1}\,\mathrm{d}u = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{2}{(u-1)(u+1)}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature, donc ici convergente, et de même valeur.

Soit alors $X\in\left[\sqrt{2};+\infty\right[$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{2}}^{X}\frac{2}{(u-1)(u+1)}\,\mathrm{d}u &= \int_{\sqrt{2}}^{X}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u\\
&\underset{\substack{u-1>0 \text{ sur } [\sqrt{2};+\infty[\\ u+1>0 \text{ sur } [\sqrt{2};+\infty[}}{=} \left[\ln(u-1)-\ln(u+1)\right]_{\sqrt{2}}^{X}\\
&= \ln(X-1)-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)-\ln(X+1)+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\\
&= \ln\left(\frac{X-1}{X+1}\right)-\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)
\end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{X-1}{X+1}\underset{X\to+\infty}{\sim}\dfrac{X}{X}\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow}1$, par composition on en déduit que $\ln\left(\dfrac{X-1}{X+1}\right)\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow}\ln(1)=0$ et donc $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{X}\frac{2}{(u-1)(u+1)}\,\mathrm{d}u \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$

Or on a :
$$\begin{aligned}
-\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) &= -\ln\left(\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}\right)\\
&= -\ln\left(\frac{2-1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}\right)\\
&= 2\ln\left(\sqrt{2}+1\right)
\end{aligned}$$

d'où $\mathcal{I}=2\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 4608

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}_+^*$.

1. Démontrer l'équivalence suivante : $\left(\displaystyle\int_0^{a}\frac{1}{(a-x)^{\alpha}}\,\mathrm{d}x \text{ est convergente}\right) \Leftrightarrow (\alpha<1)$

2. Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{1}{(t-a)^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ est divergente.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 4608

1. La fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{(a-x)^{\alpha}}$ est continue sur $[0;1[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{a}\frac{1}{(a-x)^{\alpha}}\,\mathrm{d}x$ est impropre en sa borne 1.

De plus, on a clairement que : $\forall x \in [0;a[\,,\ \dfrac{1}{(a-x)^\alpha} \geq 0.$

Le changement de variable $t = a - x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissant sur $[0;a]$ à valeurs dans $[0;a]$. D'après le théorème de changement de variable pour les intégrales impropres de fonctions positives, les deux intégrales $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{(a-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^0 \frac{1}{t^\alpha} \times (-1)\,\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Or on sait que : $\left(\displaystyle\int_0^a \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente}\right) \Leftrightarrow (\alpha < 1).$

On en déduit donc que : $\left(\displaystyle\int_0^a \frac{1}{(a-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ est convergente}\right) \Leftrightarrow (\alpha < 1).$

2. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$ est continue sur $]a;+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est impropre en ses deux bornes a et $+\infty$.

Il est clair que : $\forall t \in [a;+\infty[\,,\ \dfrac{1}{(t-a)^\alpha} \geq 0.$

Soit alors $b \in]a;+\infty[$.

Étude de $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ **:** le changement de variable $x = t - a$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant de $[a;b[$ sur $[0;b-a[$. D'après le théorème de changement de variables pour les intégrales impropres de fonctions positives, les deux intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{b-a} \frac{1}{x^\alpha} \times 1\,\mathrm{d}x = \int_0^{b-a} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.

Or on sait que $\displaystyle\int_0^{b-a} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ est convergente, si et seulement si, $\alpha < 1$.

Étude de $\displaystyle\int_b^{+\infty} \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ **:** le changement de variable $x = t - a$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant de $[b;+\infty[$ sur $[b-a;+\infty[$. D'après le théorème de changement de variables pour les intégrales impropres de fonctions positives, les deux intégrales $\displaystyle\int_b^{+\infty} \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{b-a}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \times 1\,\mathrm{d}x = \int_{b-a}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.

Or on sait que $\displaystyle\int_{b-a}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ est convergente, si et seulement si, $\alpha > 1$.

Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est divergente quelle que soit la valeur de α, puisque les deux intégrales $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_b^{+\infty} \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ ne peuvent pas converger en même temps.

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 4609

On se propose dans cet exercice d'étudier les variations de la fonction f définie par l'intégrale impropre suivante :

$$f : x \longmapsto \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que l'intégrale impropre $f(x)$ est convergente si, et seulement si, $x > 0$.

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que $x \leq y$.
Montrer que $f(x) \geq f(y)$. Qu'en déduire pour f ?

3. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x}.$

4. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

EX. 4 | Éléments de correction | Réf. 4609

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $g : t \longmapsto \dfrac{t^{-x}}{t+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x\ln(t)}}{t+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en sa borne $+\infty$.
   Il est clair que : $\forall t \in [1;+\infty[\,,\ g(t) \geq 0$.
   Par ailleurs, on a : $\dfrac{t^{-x}}{t+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{x+1}}$.
   D'après le théorème d'équivalence des intégrales impropres de fonctions positives, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
   Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente si, et seulement si, $x+1>1$ c'est à dire $x>0$.
   On en déduit donc que l'intégrale impropre $f(x)$ est convergente si, et seulement si, $x>0$, ce qui donne que le domaine de définition de la fonction f est $\mathcal{D}_f =]0;+\infty[$.
2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que $x \leq y$.
   Soit alors $X \in [1;+\infty[$. On a alors : $\forall t \in [1;X]\,,\ -x \geq -y$ ce qui donne $t^{-x} \geq t^{-y}$ et par suite $\dfrac{t^{-x}}{t+1} \geq \dfrac{t^{-y}}{1+t}$.
   Par croissance de l'intégrale sur $[1;X]$, on en déduit que : $\displaystyle\int_1^X \frac{t^{-x}}{t+1}\,\mathrm{d}t \geq \int_1^X \frac{t^{-y}}{t+1}\,\mathrm{d}t$ et donc par passage à la limite quand X tend vers $+\infty$ que $f(x) \geq f(y)$.
   On en déduit donc que la fonction f est décroissante sur $]0;+\infty[$.
3. Soit $x>0$. Les deux intégrales impropres $f(x)$ et $f(x+1)$ étant convergentes, on a alors : $f(x)+f(x+1) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{t^{-x}+t^{-(x+1)}}{t+1} + \frac{t^{-(x+1)}}{t+1}\right)\mathrm{d}t$ c'est à dire $f(x)+f(x+1) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}}\,\mathrm{d}t$.
   Or on sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1-1}$ d'après le résultat sur les intégrales de Riemann, et on en déduit donc que $f(x)+f(x+1) = \dfrac{1}{x}$.
4. Puisque f est décroissante sur $]0;+\infty[$ et positive par positivité de l'intégrale, on en déduit que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Or d'après la relation précédente on aura $\ell+\ell=0$, c'est à dire $\ell=0$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 4309

Soit $p \in \mathbb{N}$. Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{R}_p[X]$.

Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on désignera par $P(M)$ la matrice $P(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k M^k$ avec $M^0 = \mathrm{I}_3$.

On considère alors la matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de B.
2. B est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
3. On se propose dans cette question d'exprimer B^n où $n \in \mathbb{N}$ en fonction de n.
   a. Soit $P(X) = (X-1)^2(X+1) \in \mathbb{R}_3[X]$. Calculer $P(B)$.
   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $P(X)$.
      On note alors $Q(X)$ le quotient et $R(x) = a_n X^2 + b_n X + c_n \in \mathbb{R}_2[X]$ le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$.
      Monter alors que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ a_n + b_n + c_n = 1 \\ 2a_n + b_n = n \end{cases}$

c. En déduire les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

d. Expliciter alors en fonction de n la matrice B^n pour tout entier naturel n.

EX. 5 | Éléments de correction | Réf. 4309

1. Recherche des valeurs propres de B : On sait que : (λ est valeur propre de B) $\Leftrightarrow$ $(\det(\lambda \mathrm{I}_3 - B) = 0)$.

On a directement que :
$$\begin{aligned}
\det(\lambda \mathrm{I}_3 - B) &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -6 \\ -2 & \lambda-1 & -4 \\ 2 & 0 & \lambda+3 \end{vmatrix} \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3+L_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -6 \\ -2 & \lambda-1 & -4 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -6 \\ -2 & \lambda-1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\underset{C_2 \leftarrow C_2-C_3}{=} (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-3 & 4 & -6 \\ -2 & \lambda+3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{Dév. p/r } L_3}{=} (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda+3 & 4 \\ -2 & \lambda+3 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)\left(\lambda^2-1\right) \\
&= (\lambda-1)^2(\lambda+1)
\end{aligned}$$

Par suite, on en déduit que $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{-1, 1\}$

Recherche des sous-espaces propres de B : On sait que pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a pour $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(B)$:

$$\begin{aligned}
(X \in E_\lambda(B)) &\Leftrightarrow (BX = \lambda X) \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (x_1,x_2,x_3) \text{ est solution du} \\ \text{système de représentation} \\ \text{matricielle } (B-\lambda \mathrm{I}_3|0) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Recherche de $E_{-1}(B)$: la résolution du système de représentation matricielle $(B+\mathrm{I}_3|0)$ donnera $E_{-1}(B)$:

$$(B+\mathrm{I}_3|0) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \text{puis } L_2 \leftarrow -L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit donc que : $(X \in E_{-1}(B)) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$, $x_3 \in \mathbb{R}$

Par suite, $E_{-1}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Recherche de $E_1(B)$: la résolution du système de représentation matricielle $(B+\mathrm{I}_3|0)$ donnera $E_{-1}(B)$:

$$(B-\mathrm{I}_3|0) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \text{puis } L_2 \leftarrow -L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit donc que : $(X \in E_1(B)) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}, x_3 \in \mathbb{R}$

Par suite, $E_1(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Diagonalisation et trigonalisation de B : le polynôme caractéristique de B étant scindé sur $\mathbb{R}$, par théorème, B est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

Par contre, puisque $\dim(E_1(B)) < m_B(1)$, la matrice B ne sera pas diagonalisable.

2. a. On a que $B - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ puisque $(B - \mathrm{I}_3)^2 = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. Il vient alors que $(B - \mathrm{I}_3)^2 (B + \mathrm{I}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. On a donc que : $(\star)$: $\quad X^n = P(X) \times Q(X) + R(X)$.

Puisque 1 et -1 sont racines de P, il vient que $P(1) = 0$ et $P(-1) = 0$, ce qui donne les relations $R(1) = 1$ et $R(-1) = (-1)^n$.

En dérivant la relation $(\star)$, il vient que : $nX^{n-1} = P'(X) \times Q(X) + P(X) \times Q'(X) + R'(X)$.

Puisque 1 est racine double de P, 1 est encore racine de P', il vient donc en évaluant en 1 que : $n = R'(1)$.

Ainsi, on a : $\begin{cases} R(1) = 1 \\ R(-1) = (-1)^n \\ R'(1) = n \end{cases}$ ce qui est bien $\begin{cases} a_n + b_n + c_n = 1 \\ a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ 2a_n + b_n = n \end{cases}$.

c. On résout alors le système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & (-1)^n \\ 2 & 1 & 0 & n \end{array}\right)$ par échelonnement :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & (-1)^n \\ 2 & 1 & 0 & n \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & (-1)^n - 1 \\ 0 & -1 & -2 & n - 2 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_3 \\ \text{puis } L_2 \leftarrow -L_2 \text{ et } L_3 \leftarrow -L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 - \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 - n \\ 0 & 0 & -4 & 2n - (-1)^n - 3 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow 4L_1 + L4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 0 & 1 + 2n - (-1)^n \\ 0 & 2 & 0 & 1 - (-1)^n \\ 0 & 0 & -4 & 2n - (-1)^n - 3 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 2n + (-1)^n - 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 - (-1)^n \\ 0 & 0 & -4 & 2n - (-1)^n - 3 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{2n + (-1)^n - 1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{1 - (-1)^n}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{3 - 2n + (-1)^n}{4} \end{array}\right)$$

Ainsi, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_n = \dfrac{2n + (-1)^n - 1}{4} \\ b_n = \dfrac{1 - (-1)^n}{2} \\ c_n = \dfrac{3 - 2n + (-1)^n}{4} \end{cases}$

d. Puisque $X^n = P(X) \times Q(X) + R(X)$, il vient que $B^n = P(B) \times Q(B) + R(B)$ avec $P(B) = (0)$. Par suite, $B^n = a_n B^2 + b_n B + c_n \mathrm{I}_3$.