Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le résultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4242

Résoudre sur $]-1;1[$ l'équation différentielle $(\star)$ d'inconnue la fonction $y : t \longmapsto y(t)$:

$$(\star) \quad \left(1-t^2\right) y'' - ty' + y = 0$$

en effectuant le changement de variable $t = \cos(x)$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4242

Étant donnée une fonction $y : t \longmapsto y(t)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1;1[$, on définit la fonction $z : x \longmapsto y(\cos(x))$.
Il vient alors que : $\forall x \in]0;\pi[$,

$$\begin{aligned} z'(x) &= \sin(x) y'(\cos(x)) \\ z''(x) &= -\cos(x) y'(\cos(x)) + \sin^2(x) y''(\cos(x)) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} y : t \longmapsto y(t) \text{ est} \\ \text{solution de } (\star) \text{ sur }]-1;1[\end{array} \right) &\Leftrightarrow \left(\forall t \in]-1;1[, \quad \left(1-t^2\right) y''(t) - ty'(t) + y(t) = 0 \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\forall x \in]0;\pi[, \quad \left(1-\cos^2(x)\right) y''(\cos(x)) - \cos(x) y'(\cos(x)) + y(\cos(x)) = 0 \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\forall x \in]0;\pi[, \quad \sin^2(x) y''(\cos(x)) - \cos(x) y'(\cos(x)) + y(\cos(x)) = 0 \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\forall x \in]0;\pi[, \quad z''(x) + z(x) = 0 \right) \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation différentielle $z'' + z = 0$ sur $]0;\pi[$ sont les fonctions :

$$x \longmapsto C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Par suite, pour tout $t \in]-1;1[$, il vient que : $y(t) = C_1 t + C_2 \sqrt{1-t^2}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}$ qui sont donc les fonctions solutions de $(\star)$ sur $]-1;1[$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1493

Soit n un entier naturel, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^n}$

On considère l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^n} \, \mathrm{d}x$.

1. Montrer que la fonction f_n est prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer que $\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^n} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^n}$.
3. Étudier la convergence de I_n. Pour quelle(s) valeur(s) de n l'intégrale I_n converge-t-elle ?
4. À l'aide du changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$, déterminer la valeur de I_n lorsque cette dernière converge.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 1493

1. On sait que $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} X^N \mathrm{e}^{-X} = 0$ pour tout entier naturel N. Donc on en déduit que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 0$, et par suite, f_n est prolongeable par continuité en 0.

2. Il est immédiat que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^n}}{\frac{1}{x^n}} = 1$ puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 1$.

3. La fonction f_n est continue sur $]0;+\infty[$ et y est positive. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est donc impropre en ses deux bornes. L'étude de la convergence des deux intégrales $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ permettra de conclure quant à la convergence, et la valeur éventuelle, de cette dernière.
   - Puisque f_n est prolongeable par continuité en 0 pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre en 0, et donc convergente.
   - Puisque $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^n}$ et que f_n est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, par le théorème d'équivalence des intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge, si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}t$ converge, c'est à dire si et seulement si $n\geq 2$.

   Par conséquent l'intégrale I_n est convergente si et seulement si $n\geq 2$.

4. La fonction $\varphi : t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $]0;+\infty[$ sur $]0;+\infty[$.
   D'après le théorème de changement de variables pour les intégrales impropres, pour $n\geq 2$, les deux intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^n}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n-2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature puisque le changement de variable $x=\varphi(t)$ donne les relations $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \quad \Leftrightarrow \quad t = \dfrac{1}{x} \\ \mathrm{d}x = -\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \end{cases}$
   La reconnaissance de $\Gamma(n-1)$, ou une récurrence simple (avec une intégration par parties), permet de montrer que $I_n = (n-2)!$ pour tout $n\geq 2$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 1529

Pour tout entier naturel n, on désigne par I_n l'intégrale : $\quad I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t.$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que, pour tout n : $\quad I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n.$
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = (n+1)I_{n+1}I_n$.
   - **a.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
     On pourra utiliser le résultat de la question (2).
   - **b.** Calculer u_0.
   - **c.** En déduire que, pour tout n : $\quad (n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}.$
4. **a.** Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   - **b.** En déduire que : $\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad \dfrac{n+1}{n+2} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$
     On pourra utiliser le résultat de la question (2).
   - **c.** Montrer que $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et en déduire un équivalent de $n\,(I_n)^2$ en $+\infty$.
   - **d.** En déduire que la suite $(\sqrt{n}I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.
5. Soit $n\in\mathbb{N}$, montrer que : $\quad \forall u\in[-n;+\infty[,\quad \left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{u}.$
6. Montrer que : $\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \forall t\in[0;\sqrt{n}],\quad \left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-t^2} \leq \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^n}$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $J_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Déduire de la question **(6)** un encadrement de J_n à l'aide de n, I_{2n+1} et I_{2n-2}.

8. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 1529

1. On a directement que :
$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1.\,\mathrm{d}t \\ &= [t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$
et que :
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Intégrons par parties I_{n+2} en posant :
$$\begin{aligned} u(t) = \cos^{n+1}(t) &\underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} u'(t) = -(n+1)\sin(t)\cos^n t \\ v(t) = \sin(t) &\underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} v'(t) = \cos(t) \end{aligned}$$
où u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ pour obtenir :
$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \left[\sin(t)\cos^{n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^n t\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2(t)\right)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2} \end{aligned}$$
d'où $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ et finalement $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$

3. **a.** On a :
$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n &= (n+2)I_{n+2}I_{n+1} - (n+1)I_{n+1}I_n \\ &= (n+2) \times \frac{n+1}{n+2} I_n \times I_{n+1} - (n+1)I_{n+1}I_n \\ &= (n+1)I_nI_{n+1} - (n+1)I_{n+1}I_n \\ &= 0 \end{aligned}$$
et par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

b. On a $u_0 = (0+1) \times I_1 \times I_0$ et donc d'après ce qui précèdre, on en déduit que $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

c. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant constante, elle est égale à son premier terme et donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.

4. **a.** On sait que : $\forall 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le \cos(t) \le 1$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \cos^{n+1} t \le \cos^n(t)$.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$

Les fonctions étant continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, par croissance de l'intégrale, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} \le I_n$

Ainsisuite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

b. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} \le I_{n+1}$ d'où $(n+2)I_{n+2} \le (n+2)I_{n+1}$ qui donne $(n+1)I_n \le (n+2)I_{n+1}$ qui donnera $\dfrac{n+1}{n+2} \le \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$.

c. Puisque $\dfrac{n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$, on en déduit que $\dfrac{n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et d'après le théorème d'encadrement on en déduit que $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Ainsi $I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$. Comme $(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, on en déduit que : $\begin{array}{ccc} \dfrac{\pi}{2} & = & (n+1)I_{n+1}I_n \\ & \underset{n\to+\infty}{\sim} & n \times I_n \times I_n \end{array}$

c'est à dire que $n\,(I_n)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$.

d. On en déduit donc que $n\,(I_n)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$ et par composition avec la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$, on en déduit que $\sqrt{n}I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

5. Pour tout réel $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

Donc pour tout entier n et tout réel $u \geq -n$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in [-n; +\infty[\,,\ \ln\left(1+\dfrac{u}{n}\right) \leq \dfrac{u}{n}$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in [-n; +\infty[\,,\ n\ln\left(1+\dfrac{u}{n}\right) \leq u$

et par suite : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in [-n; +\infty[\,,\ \left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{\,n}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0; \sqrt{n}]$, on peut appliquer l'inégalité précédente au réel $u = -t^2$: $\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-t^2}$ ainsi qu'au réel $u = t^2$: $\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{\,t^2}$.

D'où l'on déduit en passant à l'inverse : $\mathrm{e}^{-t^2} \leq \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^n}$, ce qui donne au final : $\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-t^2} \leq \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^n}$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions qui interviennent étant continues sur le segment $[0; \sqrt{n}]$, par croissance de l'intégrale on obtient :

$$K_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leq L_n \text{ où } K_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \text{ et } L_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}t.$$

Dans K_n, on effectue le changement de variable $t = \sqrt{n}\sin(u)$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et qui amène :

$$\begin{array}{rcl} K_n & = & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{n}\cos^{2n+1} u\,\mathrm{d}u \\ & = & \sqrt{n}I_{2n+1} \end{array}.$$

Dans L_n, on effectue le changement de variable $t = \sqrt{n}\tan(u)$ est bien de classe C^1 et qui amènera :

$$\begin{array}{rcl} L_n & = & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{n}\cos^{2n-2}(u)\,\mathrm{d}u \\ & \underset{\substack{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\subset\left[0;\frac{\pi}{2}\right] \\ \forall t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right],\ 0\leq\cos^{2n-2}(t)}}{\leq} & \sqrt{n}I_{2n-2} \end{array}$$

En définitive, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{n}I_{2n+1} \leq \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leq \sqrt{n}I_{2n-2}$.

8. On sait que I_{2n+1} et I_{2n-2} sont équivalents à $\sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$.

Ainsi $\sqrt{n}I_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\sqrt{n}I_{2n-2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.