À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [4993] | 1| Tirages dans une urne | G2E 2018 Filière BCPST

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n avec $n \geq 3$.
On tire trois boules simultanément de cette urne, et on note X, Y et Z les variables aléatoires égales au numéro des boules obtenues avec $X < Y < Z$.

(1). Déterminer la loi de Y.

(2). Montrer que Y et $n+1-Y$ suivent la même loi.

(3). Calculer l'espérance de Y.

Éléments de correction

(1). Un tirage dans l'urne consistant à extraire trois boules simultanément, on peut considérer que l'univers des possibles Ω est l'ensemble des parties à 3 éléments d'un ensemble à 3 éléments, que on peut supposer que chaque tirage est équiprobable. On a par ailleurs que $\operatorname{card}(\Omega) = \binom{n}{3}$.

Par définition de Y, on a nécéssairement que $Y(\Omega) = [\![2; n-1]\!]$.

Par suite, il vient que : $\forall k \in [\![2; n-1]\!]$,
$$\mathbb{P}([Y = k]) = \frac{\binom{k-1}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{n-k}{1}}{\binom{n}{3}} = \frac{(k-1)(n-k)}{\binom{n}{3}}$$

(2). Il est clair que :
$$\begin{aligned}(2 \leq Y \leq n-1) &\Leftrightarrow (-n+1 \leq -Y \leq -2)\\ &\Leftrightarrow (n+1-n+1 \leq n+1-Y \leq n+1-2)\\ &\Leftrightarrow (2 \leq n+1-Y \leq n-1)\end{aligned}$$
et par suite, on a $(n+1-Y)(\Omega) = [\![2; n-1]\!]$ ce qui signifie que Y et $n+1-Y$ ont le même support.

Par ailleurs, on a : $\forall k \in [\![2; n-1]\!]$,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([n+1-Y = k]) &= \mathbb{P}([Y = n+1-k])\\ &= \frac{(n+1-k-1)(n-(n+1-k))}{\binom{n}{3}}\\ &= \frac{(n-k)(k-1)}{\binom{n}{3}}\\ &= \mathbb{P}([Y = k])\end{aligned}$$
ce qui signifie bien que Y et $n+1-Y$ ont la même loi.

(3). Puisque Y et $n+1-Y$ ont la même loi, elles ont nécessairement la même espérance, ce qui donne $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(n+1-Y)$. Or par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(n+1-Y) = n+1-\mathbb{E}(Y)$.

Par suite, il vient donc que $\mathbb{E}(Y) = n+1-\mathbb{E}(Y)$, ce qui amène à $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{n+1}{2}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4994] | 2| Fonction définie par une intégrale | G2E 2018 Filière BCPST

On considère les fonctions f, F et G définies par :

$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-x^2} \end{array}\right. , \quad F : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right. , \quad G : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-(xt)^2}\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

(1). À l'aide du changement de variable $u = xt$, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ G(x) = \dfrac{F(x)}{x}$

(2). Justifier que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, puis que la fonction G est paire et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Montrer alors que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ G'(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-x^2} - F(x)}{x^2}$$

(3).(a). Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(b). En déduire que : $\forall x \geq 0,\ xf(x) \leq F(x)$.

(c). Dresser alors le tableau des variations de G.

On ne demande pas de calculer la limite de G en $+\infty$.

Éléments de correction

(1). Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On effectue le changement de variable $u = xt$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ à l'aide des relations :

$$\left\{\begin{array}{ccc} (t=0) & \Leftrightarrow & (u=0) \\ (t=1) & \Leftrightarrow & (u=x) \\ (u=xt) & \Leftrightarrow & \left(t=\dfrac{u}{x}\right) \\ \mathrm{d}u & = & x\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

pour obtenir ainsi que :

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-(xt)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2} \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{x}\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{F(x)}{x} \end{aligned}$$

(2). La fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et est telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = f(x)$.

Il est clair que la fonction G est définie sur $\mathbb{R}$ qui est un intervalle symétrique par rapport à 0, et que l'on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ G(-x) &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-(-xt)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-(xt)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= G(x) \end{aligned}$$

et ainsi G est paire.

Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, elle est en particulier dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \longmapsto x$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'y annule en $x = 0$, par opérations sur les fonctions dérivables, la fonction $x \longmapsto \dfrac{F(x)}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Ainsi, la fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et on a : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \; G'(x) = \dfrac{F'(x)\times x - F(x)\times 1}{x^2} = \dfrac{f(x)\times x - F(x)}{x^2} = \dfrac{xf(x) - F(x)}{x^2} = \dfrac{x\mathrm{e}^{-x^2} - F(x)}{x^2}$

(3).(a). La fonction f est clairement continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui est un intervalle symétrique par rapport à 0. Il est immédiat que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ et ainsi que f est paire.

Par ailleurs, il est immédiat que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$

On en déduit les variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

(b). Soit $x \geq 0$. La fonction f étant décroissante sur $\mathbb{R}_+$, il vient que : $\forall t \in [0;x]\,,\; f(x) \leq f(t) \leq f(0)$

c'est à dire que l'on a : $\forall 0 \leq t \leq x, \; f(x) \leq f(t) \leq 1$

Par croissance de l'intégrale sur $[0;x]$, il vient alors que : $\displaystyle\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

ce qui donne : $\displaystyle xf(x) \leq \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

c'est à dire que : $xf(x) \leq F(x)$.

(c). La fonction G étant paire, il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$, la totalité de ses variations sur $\mathbb{R}$ se déduisant alors par symétrie.

D'après la question précédente, on a : $\forall x \geq 0, \; x\mathrm{e}^{-x^2} - F(x) \leq 0$ et ainsi $G'(x) \leq 0$.

Par suite, on en déduit les variations de G sur $\mathbb{R}_+$:

x	0		$+\infty$
Signe de $G'(x)$	$\|\|$	$-$	
Variations de G	1	$\searrow$	