À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [4896] | 1| Sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On désigne par F le sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ (A - \mathrm{I}_2)\, M = M\,(A - \mathrm{I}_2)\}$$

(1). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). Vérifier que I_2 appartiennent à F.

(3). Montrer alors que $F = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2, A)$.

(4). Déterminer alors une base de F.

Éléments de correction

(1). **F est un sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:** c'est le cas par construction de F.

Le vecteur nul de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ appartient à F : en effet, il est immédiat que $(A - \mathrm{I}_2) \times (0) = (0)$ et que $(0) \times (A - \mathrm{I}_2) = (0)$ et donc que $(A - \mathrm{I}_2) \times (0) = (0) \times (A - \mathrm{I}_2)$.

Stabilité de F par combinaison linéaire : soient $M_1 \in F$, $M_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On note $M_3 = \lambda M_1 + M_2$ et montrons que $M_3 \in F$, c'est à dire que $(A - \mathrm{I}_2)\, M_3 = M_3\,(A - \mathrm{I}_2)$.

Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}
(A - \mathrm{I}_2)\, M_3 &= (A - \mathrm{I}_2)\,(\lambda M_1 + M_2) \\
&= \lambda A M_1 + A M_2 - \lambda \mathrm{I}_2 M - \mathrm{I}_2 M_2 \\
&= \lambda \underbrace{(A - \mathrm{I}_2)\, M_1}_{=M_1(A-\mathrm{I}_2) \text{ car } M_1 \in F} + \underbrace{(A - \mathrm{I}_2)\, M_2}_{=M_2(A-\mathrm{I}_2) \text{ car } M_2 \in F} \\
&= \lambda M_1\,(A - \mathrm{I}_2) + M_2\,(A - \mathrm{I}_2) \\
&= (\lambda M_1 + M_2)\,(A - \mathrm{I}_2) \\
&= M_3\,(A - \mathrm{I}_2)
\end{aligned}$$

(2). Il est immédiat que :

$$\begin{aligned}
(A - \mathrm{I}_2)\, \mathrm{I}_2 &= A - \mathrm{I}_2 \\
&= \mathrm{I}_2\,(A - \mathrm{I}_2)
\end{aligned}$$

et donc que $\mathrm{I}_2 \in F$.

(3). Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on a : $(A - \mathrm{I}_2)\, M = \begin{pmatrix} c & d \\ -a-c & -b-d \end{pmatrix}$ et $M\,(A - \mathrm{I}_2) = \begin{pmatrix} -b & a-b \\ -dac-d & \end{pmatrix}$.

Ainsi, il vient que :

$$\begin{aligned}
\left(M \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F\right) &\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} c & d \\ -a-c & -b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a-b \\ -d & c-d \end{pmatrix}\right) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ a - b - d = 0 \\ a + c - d = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (a,b,c,d) \text{ est solution du système} \\ \text{de représentation matricielle} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Un échelonnement en lignes de ce dernier donne :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 1L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow -1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit donc que : $\left(M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F\right) \Leftrightarrow \begin{cases} a & = -c + d \\ b & = -c \\ c & = c \\ d = d \end{cases}, d \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \left(M \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\right)$$
$$\Leftrightarrow (M \in \text{Vect}(-A, \mathrm{I}_2))$$
$$\Leftrightarrow (M \in \text{Vect}(\mathrm{I}_2, A))$$

(4). La famille $\mathcal{B} = \{\mathrm{I}_2, A\}$ est une famille génératrice de F d'après la question précédente.
Elle est formée de deux vecteurs non nuls et non colinéaires, donc par propriété, elle est libre.
Ainsi, $\mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice de F. Elle en forme donc une base.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4471] | 2| Séries numériques

(1). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^{3n}\,\mathrm{d}t$.
Exprimer I_n en fonction de n.

(2). Montrer alors que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(3). Étudier la convergence absolue de $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

(4). Exprimer $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-t)^{3n}$ pour tout $t \in [0;1]$ et $N \in \mathbb{N}^*$.

(5). Montrer alors que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$ est convergente et a pour somme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.

Éléments de correction

(1). Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 t^{3n}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{3n+1}}{3n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1^{3n+1}}{3n+1} - \frac{0^{3n+1}}{3n+1} \\ &= \frac{1}{3n+1} \end{aligned}$$

(2). Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Il est immédiat que : $\forall t \in [0;1], 0 \leq 1 + t^3 \leq 1$ et donc que : $0 \leq \dfrac{t^{3N+3}}{1+t^3} \leq t^{3N+3}$.

Par suite, les fonctions $t \longmapsto \dfrac{t^{3N+3}}{1+t^3}$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^3}$ étant continues sur $[0;1]$, par positivité et croissance de l'intégrale, il vient que : $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{3N+3}\,\mathrm{d}t.$

Or d'après ce qui précède, on a : $$\begin{aligned}\int_0^1 t^{3N+3}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 t^{3(N+1)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3(N+1)+1}\end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\frac{1}{3(N+1)+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit par le théorème d'encadrement que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

(3). Étudier la convergence absolue de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$ revient par définition à étudier celle de $\displaystyle\sum \left|\frac{(-1)^n}{3n+1}\right|$, c'est à dire celle de $\displaystyle\sum \frac{1}{3n+1}$.

Or il est immédiat que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \ \dfrac{1}{3n+1} \geq 0$;
- $\dfrac{1}{3n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3n}$;
- La série $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente puisque $1 \leq 1$, donc la série $\displaystyle\sum \frac{1}{3n}$ est une série divergente.

Donc par le théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série $\displaystyle\sum \frac{1}{3n+1}$ est divergente, ce qui induit que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$ n'est pas absolument convergente.

(4). On sait que : $\forall q \neq 1, \forall N \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$.

Il est immédiat ici que : $\forall t \in [0;1], \ -t \in [-1;0]$.

Ainsi : $\forall t \in [0;1], \ -t \neq 1$ et donc $(-t)^3 \neq 1$.

Par conséquent, on en déduit que : $$\begin{aligned}\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{N} (-t)^{3n} &= \sum_{n=0}^{N} \left(-t^3\right)^n \\ &= \frac{1-\left(-t^3\right)^{N+1}}{1-(-t^3)} \\ &= \frac{1-(-1)^{N+1}\left(t^3\right)^{N+1}}{1+t^3} \\ &= \frac{1+(-1)^{N+2}t^{3N+3}}{1+t^3} \\ &= \frac{1+(-1)^{N}t^{3N+3}}{1+t^3} \\ &= \frac{1}{1+t^3} + (-1)^N\frac{t^{3N+3}}{1+t^3}\end{aligned}$$

Par ailleurs, les fonctions $t \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-t)^{3n}$, $t \longmapsto \displaystyle\frac{1}{1+t^3} + (-1)^N\frac{t^{3N+3}}{1+t^3}$ étant continues sur $[0;1]$, il vient que :

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} (-t)^{3n}\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^3} + (-1)^N\frac{t^{3N+3}}{1+t^3}\right)\mathrm{d}t$$

Par linéarité de l'intégrale on a : $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N}(-t)^{3n}\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N}\left(\int_0^1 (-t)^{3n}\,\mathrm{d}t\right) = \sum_{n=0}^{N}\left(\int_0^1 (-1)^{3n}\times t^{3n}\,\mathrm{d}t\right) = \sum_{n=0}^{N}\left((-1)^{3n}\int_0^1 t^{3n}\,\mathrm{d}t\right) = \sum_{n=0}^{N}\left((-1)^{3n}\times\frac{1}{3n+1}\right) = \sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^{3n}}{3n+1} \underset{(-1)^{3n}=((-1)^3)^n}{=} \sum_{n=0}^{N}\frac{\left((-1)^3\right)^n}{3n+1} = \sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{3n+1}$

De même, on a : $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^3}+(-1)^N\frac{t^{3N+3}}{1+t^3}\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t+\int_0^1 (-1)^N\frac{t^{3N+3}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t+(-1)^N\int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$

Ainsi, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t+(-1)^N\underbrace{\int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t\,0}_{N\to+\infty}$

Par suite, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{3n+1}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t.$

On en dd́uit que la suite des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum\frac{(-1)^n}{3n+1}$ est convergente, donc par définition, la série $\displaystyle\sum\frac{(-1)^n}{3n+1}$ est convergente.

De plus, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t.$