

Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution.**

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 1895

Résoudre le système \mathcal{S} d'inconnues x, y et z réels strictement positifs ci-contre.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x^3 y^2 z^6 & = 1 \\ x^4 y^5 z^{12} & = 2 \\ x^2 y^2 z^5 & = 3 \end{cases}$$

EX. 2 | Réf. 2022

Soit $f : x \mapsto \arctan \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)$.

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1; 1[$.
3. Donner alors une autre expression pour $f(x)$ sur $[-1; 1]$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2980

On se propose dans cet exercice de calculer la somme $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. À l'aide du binôme de Newton, montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ où $n \in \mathbb{N}$.
2. a. Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}$.
 b. Justifier alors que $\sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1} - n - 2$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Dans cette question n désigne un entier naturel non nul, et k un entier tel que $0 \leq k \leq n$.
 a. Vérifier que : $\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}$.
 b. En explicitant $\binom{n+1}{k+1}$ à l'aide de factorielles, montrer alors que : $\frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.
4. Montrer alors à l'aide d'un changement d'indice que : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k}$ puis en déduire la valeur de la somme S_n .