Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 1375

Déterminer les coefficients de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b' & c' \\ 1 & b'' & c'' \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ sachant que A admet pour vecteurs propres les trois matrices colonnes V_1, V_2 et V_3 où :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4667

On considère la matrice carré réelle d'ordre trois $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout réel a, la matrice $M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

1. **a.** Déterminer une matrice D diagonale et $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $J = PDP^{-1}$.

b. En déduire, après avoir exprimé M_a en fonction de J, que, pour tout réel a, il existe une matrice diagonale D_a que l'on exprimera, telle que $M_a = PD_aP^{-1}$.

c. Quel est l'ensemble des réels a tels qe M_a soit inversible ?

2. On cherche à présent à déterminer l'ensemble des nombres réels a tels qu'il existe une matrice $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = M_a$.

a. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = M_a$.

i. Montrer que X commute avec M_a puis que X commute avec J.

ii. Déduire de la question précédente que tout vecteur propre de J est vecteur propre de la matrice X.

iii. Établir qu'il existe une matrice diagonale $\Delta \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X = P\Delta P^{-1}$ et montrer que $\Delta^2 = D_a$.

b. Conclure en donnant l'ensemble auquel doit appartenir le réel a pour que la matrice X vérifiant $X^2 = M_a$ existe.